Algebra R II – ćwiczenia nr 1

Celem pierwszych po feriach ćwiczeń jest odświeżenie materiału dotyczącego przestrzeni wektorowych i przygotowanie do ćwiczenia zagadnień takich jak przestrzeń dualna i wyznaczniki.

Zadanie 1. Operator liniowy $F : \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}^3$ zadany jest wzorem

$$F(v) = \begin{bmatrix} v'(0) \\ v'(1) \\ v'(-1) \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} v(-1) \\ v(0) \\ v(1) \end{bmatrix},$$

gdzie $v'(t)$ oznacza pochodną wielomianu v w punkcie t. Znaleźć macierz $[F]^e{}_f$ operatora F, jeśli $f = (f_1, f_2, f_3)$ jest bazą $\mathbb{R}_2[\cdot]$ złożoną z jednomianów $f_k(t) = t^{3-k}$, zaś e jest bazą standardową w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć także bazy jądra oraz obrazu operatora F.

Zadanie 2. Znaleźć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n{}_n$$

w zależności od wartości $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Wykazać, że przestrzeń $U = \mathbb{K}^2{}_2$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $U' = \{X \in U : \ [3\ 2]X = 0\}$ i $U'' = \{X \in U : \ [4\ 3]X = 0\}$. Znaleźć rozkład macierzy $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ na składowe w podprzestrzeniach U' i U''.

Zadanie 4. Operator $P \in \mathrm{End}(V)$ nazywa się rzutem, jeśli $P^2 = P$. Dowieść, że jeśli P_1, P_2 są rzutami, to $P_1 + P_2$ jest rzutem wtedy i tylko wtedy gdy $P_1 P_2 = 0$ i $P_2 P_1 = 0$.

Zadanie 5. W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ znaleźć rozwiązanie ogólne układu

$$\begin{cases} (3-p)x + y + z = 1 \\ 2x + (1-p)y + z = 3 \\ 2x + 2y + (2-p)z = -p \end{cases}$$