Algebra R – ćwiczenia nr 11

Kolejność zadań niekoniecznie taka

Zadanie 1. Niech V będzie przestrzenią wektorową ciągów o wyrazach rzeczywistych, i.e. $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sprawdzić, że podprzestrzeń W ciągów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełniających warunek

$$y_n = x_{n+1} - x_n \quad \text{jest ciągiem arytmetycznym,}$$

jest podprzestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Znaleźć wymiar tej podprzestrzeni.

Zadanie 2. Dowieść, że jeśli suma mnogościowa $V_1 \cup V_2$ dwóch podprzestrzeni $V_1, V_2 \subset V$ także jest podprzestrzenią wektorową w V to $V_1 \subset V_2$ lub $V_1 \supset V_2$

Zadanie 3. Podprzestrzenie V_1, V_2 przestrzeni wektorowej V skończonego wymiaru mają własność

$$\dim(V_1 + V_2) = 1 + \dim(V_1 \cap V_2).$$

Udowodnić, że $V_1 \subset V_2$ lub $V_1 \supset V_2$.

Zadanie 4. Znaleźć bazę i wymiar $(D + E) \cap F$ i bazę i wymiar $D \cap F + E \cap F$, gdzie

$$D = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle, \quad E = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle,$$

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \quad \begin{array}{l} 2x + y - z + 3t = 0 \\ -y + 3z - t = 0 \\ x + z + t = 0 \end{array} \right\}$$

Zadanie 5. Oznaczmy

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix},$$

Niech także $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ będą kolejnymi kolumnami macierzy $\mathbf{a}$. Podprzestrzeń $V_1 \subset \mathbb{R}^4$ rozpięta jest przez nieparzyste kolumny a $V_2 \subset \mathbb{R}^4$ przez parzyste, tzn

$$V_1 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle, \qquad V_2 = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 \rangle.$$

Znaleźć takie bazy V_1 i V_2, że ich wspólne wektory tworzą bazę $V_1 \cap V_2$. Znaleźć także równania opisujące $V_1 + V_2$.

Zadanie 6. Rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+1 \\ p+2 \\ p-2 \\ p-1 \end{bmatrix}$$

W zależności od parametru rzeczywistego p.

Zadanie 7. Dla macierzy $\mathbf{a}$ z zadania (5) znaleźć wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ dla których układ równań

$$\mathbf{a} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest niesprzeczny.

Zadanie 8. Sprawdzić, że dla $n \geqslant 3$ przestrzeń wielomianów $\mathbb{R}_n[\cdot]$ jest sumą swoich podprzestrzeni $U = \mathbb{R}_2[\cdot]$, oraz $V = \{w \in \mathbb{R}_n[\cdot] : w(-1) = w(0) = w(2) = 0\}$. Znaleźć $U \cap V$. Dla $n = 3$ znaleźć jakiś rozkład $w(t) = t^3$ na składowe w podprzestrzeniach U i V. Ile jest takich rozkładów?