Algebra R – ćwiczenia nr 9

Szanowni Państwo, są to najprawdopodobniej ostatnie ćwiczenia z liczb zespolonych. Do zrobienia mamy jeszcze równania czwartego stopnia. Dalej proponuję przegląd zadań różnych.

Zadanie 1. Stosując metodę Ferrary (Ferrariego?) rozwiązać równania (na ćwiczeniach rozwiążemy jedno z nich)

(a) $x^4 + 4x^3 - x + \frac{1}{2} = 0$

(b) $x^4 + 8x^3 + x - 1 = 0$

(c) $x^4 + 16x - 12 = 0$

(d) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$

(e) $x^4 + 8x^3 - 27x^2 + 26x - 8 = 0$

Zadanie 2. Udowodnić, że

(a) $\cos 8^\circ + \cos 16^\circ + \cos 24^\circ + \cdots + \cos 176^\circ = -\frac{1}{2}$

(b) $\sin^2 4^\circ + \sin^2 8^\circ + \sin^2 12^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ = \frac{45}{4}$

(c) $\cos 4^\circ - \cos 8^\circ + \cos 12^\circ - \cdots + \cos 84^\circ - \cos 88^\circ = \frac{1}{2}$

Zadanie 3. Dowieść, że jeśli $u = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ to

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - u^k) = n.$$

Korzystając z tego wyprowadzić (dla $m, n \in \mathbb{N}$) następujące wzory:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \qquad \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}, \qquad \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}.$$

Zadanie 4. Zbadać i narysować zbiór $f(S)$ jeśli

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \ \Re(z) > 0\}, \quad f(z) = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3.$$

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli z_1, z_2, z_3, z_4 są liczbami zespolonymi o jednakowym module to

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ są wierzchołkami prostokąta}$$