Algebra R – ćwiczenia nr 6

Zadanie 1. Znaleźć postać trygonometryczną liczby zespolonej z:

$$(a)\ \ z = -1 - i \qquad (b)\ \ z = -3 + i\sqrt{3}$$

$$(c)\ \ z = \frac{1+it}{1-it} \qquad (d)\ \ z = 1 + e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Zadanie 2. Wiedząc, że $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, przedstawić w postaci $x + iy$ liczby

$$(a)\ \ e^{i\frac{\pi}{12}} \qquad (b)\ \ e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$(c)\ \ e^{i\frac{\pi}{8}} \qquad (d)\ \ e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

Zadanie 3. Posługując się trygonometryczną postacią liczby zespolonej sprawdzić, że

(1) $\sin^2\varphi - \sin^2\psi = \sin(\varphi - \psi)\sin(\varphi - \psi)$

(2) $\dfrac{\cos 5\varphi}{\cos^5\varphi} = 1 - 10\,\mathrm{tg}^2\,\varphi + 5\,\mathrm{tg}^4\,\varphi$

Zadanie 4. Obliczyć i narysować wszystkie wartości wyrażenia

$$(a)\ \ \sqrt[3]{i + \sqrt{3-4i}} \qquad (b)\ \ \sqrt[4]{-7+24i}$$

$$(c)\ \ \sqrt{2 + \sqrt[3]{8}} \qquad (d)\ \ \sqrt[3]{\sqrt[3]{2-2i} - \frac{1}{2}(1+i)}.$$

Zadanie 5. Udowodnić wzory

$$(a)\ \ \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\varphi) = \frac{\sin(2n\varphi)}{2\sin\varphi}, \quad \text{dla} \ \ \sin\varphi \neq 0$$

$$(b)\ \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\cos((2k-1)\varphi) = \frac{1 + (-1)^{n-1}\cos(2n\varphi)}{2\cos\varphi} \quad \text{dla} \ \ \cos\varphi \neq 0$$

$$(c)\ \ \sum_{k=1}^{n} \cos^2(k\varphi) = \frac{n}{2} + \frac{\cos((n+1)\varphi)\sin(n\varphi)}{2\sin\varphi}, \quad \text{dla} \ \ \sin\varphi \neq 0$$