



## Algebra R – ćwiczenia nr 4

**Zadanie 1.** Wiedząc, że każdy element  $S_n$  można rozłożyć na transpozycje udowodnij, że  $S_n$  jest generowana przez **(1)** transpozycje postaci  $(1 j)$  dla  $2 \leq j \leq n$ , **(2)** transpozycje postaci  $(i i + 1)$ , **(3)** dwa cykle  $(1 2)$  i  $(1, 2, 3, \dots, n)$ . Rozłóż na transpozycje jak w (1) i (2) permutację

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Zadanie 2.** Znaleźć znak permutacji  $\sigma$ , rozkład  $\sigma$  na cykle rozłączne, obliczyć  $\sigma^{24}$ , jeśli

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & 3 & 10 & 4 & 2 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Zadanie 3.** Sprawdzić, że wzór  $\sigma(x) = 3x - 25E \left( \frac{x-1}{8} \right)$  określa permutację zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 24\}$ . Znaleźć rozkłady  $\sigma$  i  $\sigma^4$  na cykle rozłączne. Obliczyć znak i rząd permutacji  $\sigma$ .

**Zadanie 4.** Sprawdzić, że permutacje

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$$

są inwolucjami a ich złożenie jest cyklem długości  $n$ . Wykazać, że każdą permutację można zapisać jako złożenie dwóch inwolucji. Znaleźć rozkład

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Zadanie 5.** Znaleźć znak permutacji  $\sigma$  korzystając ze wzoru wyrażającego znak permutacji w zależności od liczby inwersji

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2m & 2m+1 & 2m+2 & \dots & 3m \\ m+1 & m+2 & m+3 & \dots & 3m & 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}.$$

**Zadanie 6.** Znaleźć centrum  $S_n$ .

**Zadanie 7.** Znaleźć podgrupę grupy  $S_4$  zawierającą wszystkie permutacje  $\varphi$  zachowujące zbiór  $\{1, 2\}$ , tzn. takie, że  $\varphi(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$ . Czy ta podgrupa jest izomorficzna z jakąś badaną przez nas wcześniej grupą?

**Zadanie 8.** Ile jest homomorfizmów grupy  $\mathbb{Z}_6$  w grupę  $S_3$ ?