



Algebra R – ćwiczenia nr 2

Podstawowe pojęcie, którego dotyczą zadania rozwiązywane na ćwiczeniach nr 2 to pojęcie grupy.

Definicja 1. Grupą nazywamy zbiór G wyposażony w dwuargumentowe działanie

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

mające następujące własności

- (1) działanie jest łączne, tzn $\forall g, h, k \in G : (g * h) * k = g * (h * k)$,
- (2) istnieje element $e \in G$ taki, że $\forall g \in G \quad e * g = g * e = g$,
- (3) $\forall g \in G \quad \exists h \in G : g * h = h * g = e$, element h spełniający powyższy warunek nazywamy elementem odwrotnym do g i oznaczamy g^{-1}

Zadanie 1. Czy zbiór $G := \{a \in \mathbb{R} : a > 0, a \neq 1\}$ z działaniem $a \circ b = a^{\log b}$ jest grupą? Czy jest to grupa przemienna?

Zadanie 2. Pokazać, że grupa w której każdy element spełnia warunek $g^2 = e$ jest przemienna.

Zadanie 3. Przyjrzeć się grupom \mathbb{Z}_n reszt z dzielenia przez n dla małych n .

Zadanie 4. Udowodnić, że istnieją tylko dwie (z dokładnością do izomorfizmu) grupy mające cztery elementy.

Zadanie 5. Niech D_3 oznacza grupę symetrii trójkąta równobocznego. Napisać tabelkę działania dla tej grupy i znaleźć jej wszystkie podgrupy.

Zadanie 6. Nauczyć się zapisywać i składać permutacje, rozkładać permutacje na cykle i transpozycje.