Algebra II R
Zagadnienia egzaminacyjne - semestr letni 2011/2012

1. **Wielomiany.**
   - podzielność wielomianów, dzielenie z resztą (algorytm Euklidesa), rozkład wielomianu na czynniki, wielomiany nierozkładalne nad $\mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$ (podstawowe twierdzenie algebry), pierwiastki wielomianu, pierwiastki wielokrotne;
   - funkcje wymierne, rozkład na ułamki proste;
   - ideały w algebrze, ideały w algebrze wielomianów (ideały główne);
   - największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność, wielomiany interpolacyjne Lagrange'a.

2. **Przestrzeń sprzężona V^*.**
   - funkcjonały liniowe, przykłady, funkcjonały związane ze współrzędnymi wektora $v \in V$ w bazie, baza sprzężona, dualność (dwoistość) pary V i V^* (kanoniczność izomorfizmu $(V^*)^* = V$),
   - odwzorowania sprzężone, macierz odwzorowania sprzężonego, związek $[A^*]_{b^*}^{a^*} = \left([A]_a^b\right)^{\top}$,

3. **Odwzorowania i funkcjonały wieloliniowe.**
   - odwzorowania wieloliniowe i ich macierze;
   - iloczyn tensorowy funkcjonałów liniowych, funkcjonały wieloliniowe na przestrzeni V, macierz funkcjonału wieloliniowego, funkcjonały wieloliniowe symetryczne, funkcjonały wieloliniowe antysymetryczne (formy całkowicie antysymetryczne): przestrzeń $\Lambda^k V^*$ - wymiar, przykłady w $\mathbf{R}^N$.

4. **Wyznaczniki.**
   - wyznacznik macierzy kwadratowej (definicja) i jego własności, metody obliczania - przykłady,
   - twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy, wyznacznik macierzy transponowanej,
   - rozwinięcie Laplace'a,
   - odwracalność macierzy, minory, macierz dopełnień algebraicznych, wzór na macierz odwrotną;
   - układy Cramera równań liniowych(wzory Cramera); rząd macierzy a wyznacznik; zastosowanie metody Cramera do innych (niż układy Cramera) układów równań liniowych.

5. **Postać endomorfizmu (odwzorowania liniowego) $A \in \mathrm{End}(V)$.**
   - algebra endomorfizmów $\mathrm{End}(V)$, macierz endomorfimu w bazie (transformacja macierzy przy zmianie baz), algebra macierzy, wyznacznik i ślad endomorfizmu;
   - podprzestrzenie niezmiennicze dla endomorfizmu, rozkład przestrzeni na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych stowarzyszony z równaniem wielomianowym $w(A) = 0$ i związany z tym rzutowy rozkład jedności;
   - endomorfizmy diagonalizowalne - sprowadzanie do postaci diagonalnej, wartości własne i wektory własne, wielomian charakterystyczny $\chi_A(\lambda)$, spektrum (widmo) $\mathrm{Sp}\,(A)$ endomorfizmu, krotność wartości włanych, podprzestrzenie własne dla endomorfizmu - związek z podprzestrzeniami niezmienniczymi, wielomian minimalny, operatory nilpotentne, przykłady;
   - twierdzenie Cayleya-Hamiltona - rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe (niezmiennicze) związany z równaniem $\chi_A(A) = 0$, warunki konieczne i dostatczne diagonalizowalności;
   - kanoniczny rozkład endomorfizmu na część diagonalizowalną i nilpotentną (A $= D + N$), jednoznaczność rozkładu; istnienie baz dla endomorfizmu prowadzące do postaci górno-trójkątnej ich macierzy;
   - endomorfizm sprzężony $A* \in rmEndV^*$; wielomian charakterystyczny i postać endomorfizmu sprzężonego;
   - endomorfizmy przestrzeni nad ciałem liczb rzeczywistych, kompleksyfikacja przestrzeni wektorowej i endomorfizmu, wielomian charakterystyczny.

6. **Funkcje argumentu macierzowego (funkcje od endomorfizmu)**
   - funkcje wielomianowe endomorfizmu, kiedy dla dwóch wielomianów $w_1(A) = w_2(A)$? metody obliczania funkcji wielomianowych;
   - funkcje analityczne na otoczeniu spektrum $\mathrm{Sp}(A)$: definicja i metody obliczania $f(A)$ (metoda znalezienia reszty z dzielenia $f(\lambda)$ przez wielomian minimalny $m_A(\lambda)$ (lub charakterystyczny $\chi_A(\lambda)$), metoda związana z rokładem na podprzestrzenie pierwiastkowe (metoda związana z rozkładem $A = D + N$,) perzykłady;
   - zastosowanie do obliczania $f(A)$ w przypadku odwzorowań diagonalizowalnych: metoda związana ze sprowadzeniem do postaci diagonalnej ($A = C^{-1}DC$), metoda związana z rozkładem spektralnym.

7. **Formy kwadratowe.**
   - formy 2-liniowe na V, rozkład na część symetryczną i antysymetryczną, odpowiedniość między formami dwuliniowymi a odwzorowaniami liniowymi z V do V^*, macierz formy dwuliniowej w bazie - związek z macierzą odpowiedającego jej odwzorowania liniowego, rząd formy 2-liniowej, formy niezdegenerowane;
   - formy kwadratowe, odpowiedniość między formami kwadratowymi a formami 2-liniowymi symetrycznymi, macierz formy kwadratowej, rząd formy kwadratowej;
   - diagonalizacja formy kwadratowej (metoda Lagrange'a);
   - postać kanoniczna formy kwadratowej w przypadku zespolonym ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$);
   - postać kanoniczna formy kwadratowej w przypadku rzeczywistym ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$), twierdzenie Sylvestera o bezwładności formy kwadratowej, sygnatura formy kwadratowej; formy kwadratowe dodatnio (ujemnie) określone, warunki wyznacznikowe dodatniej określoności formy kwadratowej.

8. **Przestrzenie z iloczynem skalarnym - przypadek rzeczywisty (przestrzenie Euklidesa).**
   - iloczyn skalarny (definicja i własności), nierówność Schwarza, formuła równoległoboku, długość wektora (norma), odległość między wektorami, kąt między wektorami, wektory ortogonalne, bazy ortonormalne, procedura ortonormalizacji Grama-Schmidta, macierze ortogonalne, przestrzenie ortogonalne; ortogonalne dopełnienie podprzestrzeni, operatory sprzężone, rzuty ortogonalne, ortogonalna suma prosta podprzestrzeni i rozkład (ortogonalny) jedności z nią związany;
   - objętość równoległościanu - macierz Grama;
   - twierdzenie Frecheta-Riesza o postaci funkcjonału liniowego, przykłady - iloczyn wektorowy dwóch wektorów w $\mathbf{R}^3$, płaszyzny, równanie normalne płaszczyzny, odległość punktu od płaszczyzny;
   - operatory symetryczne, diagonalizowalność operatorów symetrycznych i odpowiadających im form dwuliniowym (ze względu na grupę ortogonalną), twierdzenie spektralne dla operatora symetrycznego.
   - formy kwadratowe na przestrzeni euklidesowej i ich klasyfikacja (ze względu na grupę ortogonalną), osie główne i kształt powierzchni kwadratowej (warstwy formy kwadratowej);

9. **Przestrzenie z iloczynem skalarnym - przypadek zespolony (przestrzenie Hilberta).**
   - formy hermitowskie, iloczyn skalarny (definicja i własności), nierówność Schwarza, formuła równoległoboku, długość wektora (norma), odległość między wektorami, ortogonalność wektorów, bazy ortonormalne, procedura ortonormalizacji Grama-Schmidta, macierze unitarne, dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni, rzuty ortogonalne, ortogonalna suma prosta podprzestrzeni i rozkład (ortogonalny) jedności z nią związany;
   - twierdzenie Frecheta-Riesza o postaci funkcjonału liniowego;
   - operatory sprzężone, własności operacji sprzęgania $B(H) \ni A \mapsto A^* \in B(H)$;
   - operatory hermitowskie, diagonalizowalność operatorów hermitowskich, (ze względu na grupę unitarną), twierdzenie spektralne dla operatora hermitowskiego.
   - operatory normalne - przykłady, diagonalizowalność - twierdzenie spektralne, wspólna diagonalizowalność pary przemiennych operatorów hermitowskich (symetrycznych).

Wiesław Pusz

Warszawa, w maju 2012