Algebra R II – zadania domowe, seria 3

Zadanie 1. Znaleźć macierz formy kwadratowej q w bazie $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, jeśli $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $q(x) := {x_1}^2 + {x_2}^2 + 4{x_3}^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 4x_1x_3$.

Zadanie 2. Niech $V := \mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$. Sprawdzić, że

$$q : V \to \mathbb{R}, \qquad q(v) := \int_0^1 v(t^2)\dot{v}(1-t)\mathsf{d}t$$

jest formą kwadratową. Obliczyć $Q(u, v)$, jeśli $u(t) = (t + a)^2$, $v(t) := (t - a)^2$, gdzie Q jest symetryczną formą dwuliniową odpowiadającą formie q. Znaleźć macierz $[Q]_e$ formy Q w bazie jednomianów $1, t, t^2$.

Zadanie 3. Napisać macierz q w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz znaleźć metodą Lagrange'a sygnaturę formy kwadratowej $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, danej wzorem **(a)** $q(x) := {x_1}^2 + {x_2}^2 + 4{x_3}^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 4x_1x_3$, **(b)** $q(x) := 2x_1x_2 - 2{x_2}^2 - 2x_1x_3 + 3{x_3}^2$. W obu przykładach podać przykład bazy (przestrzeni $\mathbb{R}^3$) diagonalizującej formę q, tzn. takiej, w której macierz formy q jest diagonalna.

Zadanie 4. Niech $b : \ V \times V \to \mathbb{K}$ będzie symetryczną formą dwuliniowa na V. Sprawdzić, że jeśli $W \subset V$ jest podprzestrzenią wektorową, to

$$\Big(b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R} \text{ jest niezdegenerowana}\Big) \Leftrightarrow \Big(W \cap W^\perp = \{0\}\Big)$$

gdzie $W^\perp = \{v \in V : \forall w \in W : b(v, w) = 0\}$.

Zadanie 5. W zależności od parametrów $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ znaleźć sygnaturę formy kwadratowej $q : V = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, określonej wzorem $q(x) := x^T Ax$, gdzie

$$A := \begin{bmatrix} a_1 + a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 \\ a_2 + a_1 & a_2 + a_2 & a_2 + a_3 \\ a_3 + a_1 & a_3 + a_2 & a_3 + a_3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć $\ker Q = \{x : Q(\cdot\,, x) = 0\}$, jeśli Q jest symetryczną formą dwuliniową stowarzyszoną z formą kwadratową q.

Zadanie 6. Określmy dwie formy kwadratowe: $q(x) := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $r(x) = x_1x_2 - {x_3}^2$ na przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$. Zbadać, czy istnieje (a jeśli tak, to znaleźć) taki operator $F \in \mathrm{End}(V)$, że $r = q \circ F$, tzn. że $\forall x : r(x) = q(F(x))$.

Zadanie 7. Sprawdzić, że jeśli iloczyn skalarny w przestrzeni macierzy $\mathbb{R}^n{}_n$ zadany jest wzorem

$$(X|Y) = \mathrm{tr}(\,X^TY)$$

to przestrzeń $\mathbb{R}^n{}_n$ jest ortogonalną sumą prostą swoich podprzestrzeni V_0, V_-, V_+, gdzie

$$V_0 = \langle I \rangle, \quad V_+ = \{X \in \mathbb{R}^n{}_n : \quad X^T = X,\ \mathrm{tr}X = 0\}, \quad V_- = \{X \in \mathbb{R}^n{}_n : \quad X^T = -X\}$$

Znaleźć rozkład macierzy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

na składowe w tych podprzestrzeniach.

Zadanie 8. Załóżmy, że układ (e_1, e_2, e_3, e_4) jest bazą ortonormalną pewnej przestrzeni euklidesowej V. Sprawdzić, że v_1 i v_2 są ortogonalne i dopełnić układ (v_1, v_2) do ortogonalnej bazy V:

$$v_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3 - 3e_4, \qquad v_2 = 2e_1 - 3e_2 + 2e_3 + 4e_4$$

Zadanie 9. Znaleźć odległość między prostymi:

$$\ell_1 = \{(x, y, z) : \ \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = z\}, \qquad \ell_2 = \{(x, y, z) : \ \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}\}$$

Zadanie 10. Znaleźć odległość przekątnej sześcianu o boku 1 od nieprzecinającej jej przekątnej ściany bocznej.

Zadanie 11. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określamy iloczyn skalarny warunkiem, że układ wektorów

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest ortonormalny. Znaleźć macierz iloczynu skalarnego w bazie standardowej. Znaleźć bazę odwrotną $f = (f_1, f_2, f_3)$ do bazy standardowej, tzn. taką, że $(f_i|e_j) = \delta_{ij}$.

Zadanie 12. Znaleźć płaszczyznę $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ zawierającą punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ oraz tworzącej kąt 60° z płaszczyzną Π_0:

$$\mathbf{p} = (1, 2, -1), \quad \mathbf{q} = (2, 1, 1), \quad \Pi_0 = \{\mathbf{x} : \ x_1 - 4x_2 + x_3 = 1\}$$

Zadanie 13. Zortogonalizować metodą Grama-Schmidta względem kanonicznego iloczynu skalarnego w $V = \mathbb{R}^3$ układ wektorów

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 14. Dopełnić układ wektorów do bazy ortogonalnej w $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 15. Znaleźć bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^3$, której dwa elementy leżą w płaszczyźnie o równaniu

$$2x - y - 2z = 0.$$

Przyjmujemy kanoniczny iloczyn skalarny.

Zadanie 16. Znaleźć rzut prostopadły prostej L na płaszczyznę Π jeśli

$$L: \quad \frac{x+4}{5} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{4}, \qquad \Pi: \quad 2x - 2y + z = 4.$$