Algebra R II – zadania domowe, seria 2

Zadanie 1. Sprawdzić, że liczba

$$D := \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 9 \\ 9 & 4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

jest podzielna przez 47, wiedząc, że liczby 2379, 9447, 8131, 4653 są podzielne przez 47

Zadanie 2. Wykazać, że dla macierzy kwadratowych A, B, C, D zachodzą równości

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -A & B \\ C & -D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Znaleźć $e^{At}v$ jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Niech

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich v granica $\lim_{t\to+\infty} exp(At)v$ jest skończona? A jeżeli $t \to -\infty$?

Zadanie 5. Obliczyć $\varphi(A)$ jeśli φ jest wielomianem

$$\varphi(\lambda) = \prod_{n=1}^{20} (\frac{20}{n}\lambda - 1),$$

zaś

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Operator liniowy $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadany jest wzorem

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (x^1 - x^2 - x^3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Znaleźć wartości własne i wektory własne operatora T. Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych operatora T? Jeśli tak, podać przykład takiej bazy.

Poniższe zadania ukradłam Przemkowi Majewskiemu. Nie są trudne, ale pouczające. Powodzenia.

Zadanie 7. Niech V będzie przestrzenią wektorową macierzy 2×2 o współczynnikach zespolonych Rozważmy odwzorowanie

$$T : V \to V, \qquad T(A) = \sigma_1 A \sigma_1 - A^T \quad \text{dla} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie standardowej oraz w bazie złożonej z macierzy

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć jądro, obraz oraz wyznacznik tego odwzorowania.

Zadanie 8. (macierze Pauliego) Rozważmy rodzinę macierzy w $M_2(\mathbb{C})$ postaci $\{\mathbf{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, gdzie σ_i są jak w poprzednim zadaniu Sprawdzić, że, ze $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$, $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_j\sigma_k$. Wprowadźmy oznaczenie

$$\mathbf{x} \cdot \sigma = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3.$$

Obliczyc $\det(1 + \mathbf{x} \cdot \sigma)$ oraz $(\mathbf{x}\sigma)^2$.

Zadanie 9. Dla dowolnej macierzy A wyznaczyć $\mathbf{h}$ takie, że $A = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A)\,\mathbf{I} + \mathbf{h} \cdot \sigma$. Innymi słowy, zapisać macierz A w bazie złożonej z jedynki oraz macierzy Pauliego.

Zadanie 10. Dobrze znana jest własność $e^{x+y} = e^x e^y$. Niestety w przypadku na ogół nieprzemiennych macierzy sytuacja wygląda gorzej. Sprawdzić, ze dla macierzy, jeśli $[A, B] = 0$, tzn. macierze komutuja można je przestawiać jak liczby, to $e^{A+B} = e^A e^B$. Wskazówka: Warto się przyjrzeć szeregom potęgowym i przypomnieć jakie wymagania stawiał dowód tego faktu dla funkcji wykładniczej.

Zadanie 11. (dowód przy pomocy równania różniczkowego z instrukcją) Niech A, B będą macierzami spełniającymi zależność $[A, [A, B]] = 0$, tzn. komutator macierzy $[A, B]$ można zamieniać dowolnie miejscami z macierzą A. Celem zadania będzie wykazanie, krok, po kroku, ze

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B].$$

Tożsamości takie i podobne oraz macierze Pauliego, pełnią istotną rolę w rachunkach na mechanice kwantowej. W pierwszym kroku dokonamy modyfikacji polegającej na dodaniu parametru t przy macierzy A, można go interpretować jak czas, mamy

$$e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A, B].$$

Widać, ze dla $t = 0$ obie strony sa równe B i tym samym równość jest prawdziwa. Obserwujemy również, ze dla $t = 1$ odtwarzamy początkowo postawiony problem. Zróżniczkować teraz obie strony po parametrze t i sprawdzić, ze spełniają takie samo równanie różniczkowe. Uwaga: Kiedy różniczkujemy funkcje od operatora musimy uważać, gdzie piszemy macierz, która powstaje w wyniku różniczkowania funkcji wewnętrznej. Macierze nie sa przemienne.

Zadanie 12. Korzystając z poznanego rozkładu macierzy 2×2 oraz własności funkcji wykładniczej obliczyć ogólnie exp(A) dla dowolnej macierzy o zespolonych elementach macierzowych.