Algebra R II

Zadania domowe, 19 marca 2012

Zadanie 1. Załóżmy, że macierz $A \in \mathbb{K}^n{}_n$ ma tę własność, że wszystkie kolumny mają jednakowe sumy wyrazów. Jeśli wyrazy macierzowe macierzy A oznaczymy $a^i{}_j$, własność powyższą możemy zapisać jako

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j = 1.$$

Udowodnić, że macierz odwrotna A^{-1} (o ile istnieje) ma tę samą własność.

Zadanie 2. Macierz $A \in \mathbb{K}^n{}_n$ jest postaci $A = I + ab^T$, gdzie I jest macierzą jednostkową a $a, b \in \mathbb{K}^n$. Jakie warunki muszą spełniać wektory a i b, żeby macierz A była odwracalna? Znaleźć wzór na A^{-1}.

Zadanie 3. *(... trochę znajome...)* Udowodnić, że jeśli V jest przestrzenią skończonego wymiaru i $F \in \mathrm{End}(V)$, to następujące warunki są równoważne

(1) $\ker F^k = \ker F$,
(2) $\ker F^2 = \ker F$,
(3) $\ker F \cap \operatorname{im} F = \{0\}$,
(4) $V = \ker F \oplus \operatorname{im} F$.

Zadanie 4. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Określmy operator $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2{}_2)$ wzorem $F(X) = A^T X A - 10X^T$. Znaleźć jądro, obraz i rząd F oraz bazy, w których F ma postać kanoniczną.

Zadanie 5. Przedstawić macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & -4 \\ 3 & 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

jako sumę minimalnej liczby macierzy rzędu 1. Uzasadnić, że mniejsza liczba składników jest niemożliwa.

Zadanie 6. W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ rozwiązać układ równań:

$$\begin{bmatrix} p+2 & 5 & -3 \\ 3 & p+4 & -3 \\ 7 & 11 & p-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Niech $V = \mathbb{R}_3[\cdot]$. Określmy formy liniowe ϕ, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 na V oraz operator $D \in$End(V) wzorami

$$\phi(v) = v(7), \quad \phi_k(v) = v^{(k)}(-1), \quad D(v) = \dot{v}.$$

Przedstawić formę $\psi = D^*(\phi)$ jako kombinację liniową form ϕ_k. Oznaczenia $v^{(k)}$, $\dot{v}$ oznaczają odpowiednio k-tą i pierwszą pochodną wielomianu v.

Zadanie 8. Znaleźć jawną postać zbioru tych wartości $z \in \mathbb{C}$, dla których wektory

$$\begin{bmatrix} z^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ iz \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2z^4 \end{bmatrix}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3$.

Zadanie 9. Obliczyć wyznacznik

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Zadanie 10. Sprawdzić, że jeśli P jest rzutem na $V_1 \subset V$ wzdłuż $V_0 \subset V$ (tzn. $P = P^2$, $V_1 = \operatorname{im} P$, $V_0 = \ker P$), to dla każdego endomorfizmu F zachodzi równoważność

$$(F(V_0) \subset V_1 \quad \text{i} \quad F(V_0) \subset V_1) \iff PF + FP = F$$