Zadania domowe z Algebry IR
Liczby zespolone

1. Wykaż, że $x^2 + x + 1$ jest dzielnikiem $x^{2001} + 2x^{2000} + 2x + 1$.

2. Udowodnij

   (a) $\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\phi) = \frac{\sin(2n\phi)}{2\sin\phi}$, dla $\sin\phi \neq 0$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cos((2k-1)\phi) = \frac{1+(-1)^{n-1}\cos(2n\phi)}{2\cos\phi}$, dla $\cos\phi \neq 0$

   (c) $\sum_{k=1}^{n} \cos^2(k\phi) = \frac{n}{2} + \frac{\cos((n+1)\phi)\sin(n\phi)}{2\sin\phi}$, dla $\sin\phi \neq 0$

3. Wielomian $x^{12} - 1$ rozłóż na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego.

4. Znajdź $\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1}}$. Wynik zapisz w pierwiastnikach rzeczywistych.

5. Rozwiąż te zadania, których nie było na ćwiczeniach

   (a) $z^2 - 4z + 1 = 0$

   (b) $z^2 + z - i + 1$

   (c) $z^3 = 12z + 20$

   (d) $z^3 = 7z - 6$

   (e) $z^3 = 12z + 16$

   (f) $z^3 = 6z - 7i$

   (g) $z^3 - 6z + 4 = 0$

   (h) $z^3 - 6z^2 - 4 = 0$

   (i) $z^3 + 3z^2 + 6z - 2 = 0$

   (j) $z^3 + (3 + 3i)z + 2 + i = 0$

   (k) $x^4 + 4x^3 - x + \frac{1}{2} = 0$

   (l) $x^4 + 8x^3 + x - 1 = 0$

   (m) $x^4 + 16x - 12 = 0$

   (n) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$

   (o) $x^4 + 8x^3 - 27x^2 + 26x - 8 = 0$

6. Wzorując się na metodzie Cardano zaproponuj metodę rozwiązywania równań $z^5 - 5pz^3 + 5p^2z - 2q = 0$. Rozwiąż $z^5 - 10z^3 + 20z - 8 = 0$.

7. Znajdź obraz podzbiorów płaszczyzny zespolonej zadanych przez

   (a) $Re\, z = 2Im\, z$,

   (b) $|z| = 1$

   odwzorowań

(a) $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$,

(b) $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C}$

(c) $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{C}$

8. Znajdź rozwiązanie ogólne równania $x_{n+2} = -x_n$. Wynik zapisz w postaci rzeczywistej.

9. Udowodnij, że cztery róż ne liczby zespolone $z_1, z_2, z_3, z4$ spełniają warunek

$$\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$$

wtedy i tylko wtedy gdy punkty płaszczyzny zespolonej im odpowiadające leżą na okręgu lub na prostej.