Zadania domowe seria 3 - problemy liniowe

Zadanie 1. Traktując p jako parametr rzeczywisty rozwiązać układ równań $ax = b$ jeśli

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 2p \\ 1 \\ p \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^4.$$

Zadanie 2. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni

$$V = \{v \in \mathbb{K}_3[\cdot] : \ \ v(1) = \dot{v}(0) = -\frac{1}{2}v(0)\} \subset \mathbb{K}_3[\cdot].$$

Zadanie 3. W przestrzeni macierzy 2×2 o współczynnikach rzeczywistych dane są dwie podprzestrzenie wektorowe $V_1 = \{X : [1\ 1\ \ 2]X = 0\}$ i $V_2 = \{X : \ \ X \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\}$. Znaleźć bazę $V_1 \cap V_2$ oraz równania opisujące $V_1 + V_2$.

Zadanie 4. Niech $n \in \mathbb{N}$. Sprawdzić, że wielomiany $v_k(t) = t^k + t^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ tworzą bazę podprzestrzeni $W = \{v \in \mathbb{K}_n[\cdot] : \ \ v(-1) = 0\} \subset \mathbb{K}_n[\cdot]$.

Zadanie 5. Niech $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset V$ będzie rosnącym ciągiem podprzestrzeni. Dowieść, ze jeśli wektory $e_1, \ldots, e_n \subset V$ spełniają warunki $e_k \subset V_k \setminus V_{k-1}$, (tzn. $e_k \in V_k$, $e_k \notin V_{k-1}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, to sa liniowo niezależne.

Zadanie 6. Znaleźć, lub dowieść, że nie istnieje macierz S taka, że

$$S \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad S \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad S \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Obliczyć P^{-1} jeśli

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Problemy liniowe można także ćwiczyć używając dowolnego zbioru z algebry liniowej (może być np. Kostrykin).