Algebra R II

uzupełnienie do ćwiczeń

Szanowni Państwo, ze względu na zamieszanie z ostatnimi ćwiczeniami i ostatnim wykładem umknęła nam jedna istotna kwestia: diagonalizacja formy kwadratowej w przestrzeni z iloczynem skalarnym. Podstawowym twierdzeniem z którego tu korzystamy jest twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych, które mówi, że w przestrzeni z iloczynem skalarnym każdy operator normalny ma bazę diagonalizującą ortonormalną. Operator normalny to taki, który jest przemienny ze swoim hermitowskim sprzężeniem, tzn $F^\dagger F = FF^\dagger$. Oznacza to, że po pierwsze operator normalny jest diagonalizowalny a po drugie, że wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe.

Wiadomo, że forma kwadratowa q definiuje formę dwuliniową symetryczną Q oraz odwzorowanie samosprzężone $F_q : V \to V^*$. W obecności iloczynu skalarnego przestrzeń V^* jest identyfikowana z V i odwzorowanie samosprzężone F_q odpowiada odwzorowaniu hermitowskiemu $F : V \to V$ (tzn $F^\dagger = F$) takiemu, że

$$Q(v, w) = (v|F(w)).$$

Jeśli $G : V \to$ jest izomorfizmem $G : V \to V^*$ pochodzącym od iloczynu skalarnego, tzn $G(v) = (v|\cdot)$, to $F = G^{-1} \circ F_q$. Odwzorowanie hermitowskie jest przykładem odwzorowania normalnego, zatem podlega zacytowanemu na wstępie twierdzeniu.

W bazie w której iloczyn skalarny ma macierz identycznościową, tzn w bazie ortonormalnej macierze formy Q i odwzorowań F_q i F są identyczne. Można więc do diagonalizacji formy używać zarówno narzędzi z zakresu teorii operatorów. Procedurę znajdowania ortonormalnej bazy diagonalizującej dla formy kwadratowej omówimy na przykładzie.

Znajdziemy ortonormalną bazę diagonalizującą formę kwadratową

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

wzgklędem kanonicznego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$. Macierz formy w bazie kanonicznej

$$A = [Q]_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tradycyjna analiza spektralna daje wielomian charakterystyczny $w_A(t) = -t^3 + 3t + 2 = -(t + 1)^2(t - 2)$. Mamy podwójną wartość własną $t = 1$, ale odpowiada jej dwuwymiarowa przestrzeń własna. Postępując jak zwykle otrzymujemy wektor własny dla wartości własnej 2:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i dwa liniowo niezależne wektory dla -1:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wektor v_1 jest prostopadły do v_2 i do v_3, ale wektory v_2 i v_3 rozpinające przestrzeń własną dwuwymiarową były wybrane jakkolwiek w tej przestrzeni, więc nie są prostopadłe. Można je jednak zortogonalizować zastępując v_3 przez

$$w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(np. ortogonalizacja Grama-Schmidt'a). Bazę ortonormalną otrzymujemy dzieląc przez długość:

$$f_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f_2 \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad f_3 = \frac{w}{|w|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Macierz przejścia z bazy f do bazy e, tzn $[id]^e{}_f$ jest macierzą składającą się z wektorów bazy f:

$$[id]^e{}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Jest to macierz ortogonalna, która ma tę własność, że odwrotna do niej jest równa sprzężonej, czyli w rzeczywistym przypadku - transponowanej. W ten sposób wzór na zmianę bazy dla macierzy operatora F i macierzy formy Q wygląda tak samo.