Algebra IR
Zadania domowe i powtórzeniowe
Grupy - część I

Pilne

1. Niech $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z działaniem „po współrzędnych” czyli $(a, x) \oplus (a', x') = (a + a' \bmod 2,\ x + x' \bmod 2)$. Napisać tabelkę działania dla tej grupy. Czy ta grupa jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_4$?
2. Podać przykłady płaskich figur geometrycznych, których grupy symetrii są izomorficzne z a) $\mathbb{Z}_2$, b) $\mathbb{Z}_3$, c) $\mathbf{S}_3$, d) $\mathbf{V}_4$ Kostrykin-I-5.2.21
3. Wykazać, że zbiór homografii tzn. funkcji postaci $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, jest grupą względem operacji składania funkcji. Kostrykin-I-5.2.8
4. Udowodnić, że przecięcie dowolnej rodziny podgrup jest podgrupą.
5. Rozłóż permutację (12)(123)(1234)(12345) na cykle rozłączne.

Mniej pilne

1. Wykazać, że grupa rzędu 6 jest albo przemienna albo izomorficzna z $\mathbf{S}_3$. Kostrykin-I-5.2.18
2. Rzędem elementu grupy σ (nie mylić z rzędem grupy), nazwamy najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $\sigma^n = e$. Dana jest permutacja $\sigma \in \mathbf{S}_{13}$, która rozkłada się na cztery cykle rozłączne o długościach 1, 2, 4 i 7. Jaki jest rząd tego elementu.
3. Sprawdzić, że wzór $\sigma(x) := 3x + 7 - 16\left[\frac{x+1}{5}\right]$ (gdzie $\left[\frac{x+1}{5}\right]$ oznacza część całkowitą liczby $\frac{x+1}{5}$) określa permutację $\sigma : \{1, 2, \ldots, 16\} \to \{1, 2, \ldots, 16\}$. Znaleźć tabelkę wartości σ oraz jej rozkład na cykle rozłączne. Znaleźć przykład permutacji $\rho : \{1, 2, \ldots, 16\} \to \{1, 2, \ldots, 16\}$, spełniającej warunek $\rho \circ \rho = \sigma$; ile jest takich permutacji? Cieciura-219
4. Obliczyć liczbę inwersji i znak permutacji: Cieciura-242
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2m & 2m+1 & 2m+2 & \ldots & 3m \\ m+1 & m+2 & m+3 & \ldots & 3m & 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}.$$
5. Ile elementów rzędu 6 zawiera grupa a) $\mathbf{S}_5$, b) $\mathbf{A}_5$ tzn. grupa permutacji parzystych (alternujących) zbioru pięcioelementowego. Kostrykin-I-5.3.5
6. Wykazać, że grupy symetrii właściwych (obrotów) czworościanu foremnego, sześcianu i ośmiościanu foremnego są izomorficzne odpowiednio $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{S}_4$ i $\mathbf{S}_4$. Kostrykin-I-5.2.23