Algebra IR
Zagadnienia egzaminacyjne - semestr zimowy2011/2012

1. **Grupy.**
   - definicja i przykłady, grupy przekształceń, podgrupa, pojęcie homomorfizmu grup, jądro i obraz homomorfizmu, izomorfizm grup, grupy cykliczne $\mathbf{Z}_n$ i $\mathbf{Z}$;
   - grupy skończone, rząd grupy, rząd elementu; grupy symetrii wielokątów; grupy abelowe, klasyfikacja grup skończonych niskiego rzędu, twierdzenie Lagrange'a o rzędzie podgrupy;
   - grupa permutacji S_n, transpozycje, cykle, rozkład permutacji na cykle, rozkłady na transpozycje, znak permutacji.

2. **Ciała.**
   - definicja i przykłady, podstawowe własności,
   ciała: $\mathbf{Q}$ - liczb wymiernych, $\mathbf{R}$ - liczb rzeczywistych, $\mathbf{C}$ - liczb zespolonych (rozszerzenia ciał), ciała skończone $\mathbf{Z}_p$ (p - liczba pierwsza), liczby algebraiczne i przestępne (nad $\mathbf{Q}$),
   - problem algebraicznej zupełności ciała.

3. **Liczby zespolone.**
   - część rzeczywista i urojona liczby zespolonej, sprzężenie liczby zespolonej, działania na liczbach zespolonych
   - ciało liczb zespolonych;
   - postać trygonometryczna liczby zespolonej (moduł liczby zespolonej i argument liczby zespolonej), interpretacja geometryczna działań na liczbach zespolonych,;
   - zastosowanie do obwodów prądu sinusoidalnie zmiennego;
   - ciągi rekurencyjne,
   - wzór de Moivre'a, równania $z^n = a$ ($a \in \mathbf{C}$), pierwiastki stopnia n-go z 1,
   - równania wielomianowe 3-go stopnia (metoda Cardano), równania wielomianowe 4-go stopnia.

4. **Przestrzenie wektorowe (liniowe) i odwzorowania liniowe.**
   - definicja i przykłady, podprzestrzenie wektorowe, kombinacje liniowe wektorów, generowanie podprzestrzeni (układy rozpinające), liniowa zależność i niezależność wektorów, operacje elementarne na układach wektorów, minimalne układy rozpinające, baza przestrzeni wektorowej, przestrzenie skończenie wymiarowe, wymiar przestrzeni wektorowej (lemat Steinitza o zastępowaniu), przestrzenie $\mathbf{K}^N$, współrzędne wektora w bazie,
   - suma prosta podprzestrzeni, jednoznaczność rozkładu wektora na składowe w sumie prostej, operatory rzutowe, rozkład jedności związany z rozkładem na sumę prostą (wzajemna odpowiedniość);
   - przestrzenie macierzy $\mathcal{M}_N^M(\mathbf{K})$, operacje na macierzach (dodawanie i mnożenie macierzy, mnożenie macierzy przez liczbę), rząd macierzy (rząd wierszowy i rząd kolumnowy macierzy, twierdzenie o równości obu rzędów), operacje elementarne na macierzach, macierze jako odwzorowania liniowe przestrzeni $\mathbf{K}^N$ w $\mathbf{K}^M$;
   - odwzorowania liniowe, jądro i obraz odwzorowania liniowego, przestrzeń odwzorowań liniowych $L(V, W)$, związek między wymiarem jądra odwzorowania liniowego, a wymiarem obrazu tego odwzorowania, zastosowanie do badania injektywności i surjektywności odwzorowania, problem odwracalności odwzorowania liniowego, macierz $[A]_a^b$ odwzorowania liniowego $A \in L(V, W)$ w bazach (a - baza V, b - baza W), badanie własności odwzorowania liniowego poprzez badanie własności jego macierzy.

5. **Równania liniowe.**
   - równania liniowe (niejednorodne), $Ax = b$, problem istnienia rozwiązań, problem jednoznaczaści; ogólna postać rozwiązania równania liniowego (sprowadzenie do równania liniowego jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego),
   - przypadek równań liniowych w K^N (układy równań liniowych), macierz układu, macierz rozszerzona, istnienie rozwiązań (twierdzenie Kroneckera-Capelli), rozwiązywanie układów równań liniowych (operacje elementarne na wierszach - metoda Gaussa).

6. **Wyznaczniki.**
   - wyznacznik macierzy kwadratowej (definicja) i jego własności, metody obliczania - przykłady, twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy, wyznacznik macierzy transponowanej,
   - rozwinięcie Laplace'a,.

7. **Przestrzeń sprzężona V^*.**
   - funkcjonały liniowe, przykłady, funkcjonały związane ze współrzędnymi wektora $v \in V$ w bazie, baza sprzężona, dualność (dwoistość) pary V i V^* (kanoniczność izomorfizmu $(V^*)^* = V$).

Wiesław Pusz

Warszawa, w styczniu 2012