Zbiór zadań z Analizy

Hubert Andrzejewski, Grzegorz Cieciura, Krystian Gładych, Katarzyna Grabowska,
Damian Kayzer, Arkadiusz Kobus, Patryk Michalski,
Aleksandra Oszmian, Paweł Przybyła, Gabriela Szwed, Krzysztof Wolicki

Lipiec 2023

W tym pliku zgromadzony jest wynik pracy grup 8 i 9 realizujących projekty studenckie ZPS1. Zadanie polegało na opracowaniu i zapisaniu w postaci pliku TEX notatek Grzegorza Cieciury do ćwiczeń w pierwszym semestrze wykładu z Analizy na poziomie R. Materiały zostały uzupełnione o niektóre zagadnienia dotyczące drugiego semestru. Gdzie tylko było to możliwe, staraliśmy się zachować styl Grzegorza Cieciury.

Materiały te przeznaczone są do dalszego opracowania i, ostatecznie, wydania w postaci zbioru zadań. Zapraszamy do korzystania z tego pliku jako materiału pomocniczego do własnej nauki. Proszę wziąć pod uwagę, że rozwiązania mogą zawierać błędy lub nieścisłości. Niektóre rozwiązania pochodzą od Grzegorza Cieciury, niektóre zadania rozwiązaliśmy sami. Używanie tego pliku w innym celu niż uczenie się będzie bardzo niewłaściwe.

Katarzyna Grabowska

Oznaczenia

$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych (przyjmujemy konwencję $0 \notin \mathbb{N}$)
$\mathbb{Q}$	zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{C}$	zbiór liczb zespolonych
$\varnothing$	zbiór pusty
$\{x \in X \mid W(x)\}$	zbiór tych elementów $x \in X$, które spełniają warunek $W(x)$
$[a, b]$	zbiór $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
$[a, b[$	zbiór $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
$]a, b]$	zbiór $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
$]a, b[$	zbiór $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$:=$	równa się z definicji (po lewej stronie definiowany obiekt, po prawej definicja)
$=:$	równa się z definicji (po lewej stronie definicja, po prawej definiowany obiekt)
$\overline{k, l}$	zbiór $\{n \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant n \leqslant l\}$ dla $k, l \in \mathbb{Z}$ (stąd dla $k > l$ mamy $\overline{k, l} = \varnothing$)
$(\cdot, \ldots, \cdot)$	skończony zbiór uporządkowany (ciąg skończony)
$X_1 \times \ldots \times X_n$	iloczyn kartezjański zbiorów, tj. zbiór $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$
X^n	zbiór $\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ czynników}}$
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$	ciąg nieskończony $(x_1, x_2, \ldots)$ numerowany liczbami naturalnymi
$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	zbiór wyrazów ciągu (x_n)
$\forall$	kwantyfikator ogólny (duży)
$\exists$	kwantyfikator szczegółowy (mały)
$\exists!$	kwantyfikator wyrażający istnienie dokładnie jednego elementu
$A \cup B$	suma mnogościowa, tj. zbiór $\{x \mid x \in A \text{ lub } x \in B\}$
$A \cap B$	przecięcie, tj. zbiór $\{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$
$A \setminus B$	różnica mnogościowa, tj. zbiór $\{x \in A \mid x \notin B\}$
$A \div B$	różnica symetryczna, tj. zbiór $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
A'	dopełnienie względem danej przestrzeni X, tj. zbiór $X \setminus A$ dla $A \subset X$
Y^X	zbiór wszystkich odwzorowań zbioru X w zbiór Y
$f(A)$	obraz podzbioru $A \subset X$ względem odwzorowania $f : X \to Y$
$f^{-1}(B)$	przeciwobraz podzbioru $B \subset Y$ względem odwzorowania $f : X \to Y$
$\Rightarrow$	implikacja w prawą stronę
$\Leftarrow$	implikacja w lewą stronę
$\Leftrightarrow$	równoważność zdań
$\lvert A \rvert$	moc zbioru, tj. liczba jego elementów (lub kardynalność jeśli A jest nieskończony)
$n!$	silnia dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$n!!$	podwójna silnia dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\binom{x}{n}$	uogólniony symbol Newtona dla $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1 Zadania wstępne

1.1 Zasada indukcji

Zasada indukcji wyraża jedną z podstawowych własności zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Jest ona bądź aksjomatem, bądź twierdzeniem w zależności od tego, jak konstruowany jest zbiór $\mathbb{N}$.

Zasada Indukcji (ZI). Jeżeli T jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ spełniającym następujące warunki:

1° $1 \in T$,

2° $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, n \in T \Rightarrow n + 1 \in T$,

to T jest całym zbiorem $\mathbb{N}$, tzn. $T = \mathbb{N}$.

Zasadę indukcji stosuje się do tzw. dowodów indukcyjnych twierdzeń, których teza ma zachodzić dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. W tym celu wystarczy zauważyć, że twierdzenie:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, Z_n,$$

gdzie $Z_1, Z_2, \ldots$ są pewnymi zdaniami, jest równoważne z twierdzeniem:

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, Z_n\} = \mathbb{N},$$

może więc być udowodnione „metodą indukcji matematycznej” poprzez sprawdzenie, że:

1° Z_1,

2° $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, Z_n \Rightarrow Z_{n+1}$.

Zadanie 1.1. (Patryk Michalski) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Rozwiązanie. 1° Dla $n = 1$ teza jest spełniona, bowiem $1 \cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n = k \in \mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$\begin{aligned} &1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że teza zachodzi również dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.2. (Patryk Michalski) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rozwiązanie. 1° Dla $n = 1$ teza jest spełniona, bowiem $1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n = k \in \mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$\begin{aligned} &1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że teza zachodzi również dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.3. (Patryk Michalski) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

Rozwiązanie. 1° Dla $n = 1$ teza jest spełniona, bowiem $1^3 = 1^2 \cdot (2 \cdot 1^2 - 1)$.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n = k \in \mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$\begin{aligned}
&1^3 + 3^3 + \ldots + (2k-1)^3 + (2k+1)^3 = \\
&= k^2(2k^2-1) + (2k+1)^3 = 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = \\
&= 2k^4 + 8k^3 + 12k^2 + 8k + 2 - k^2 - 2k - 1 = 2(k+1)^4 - (k+1)^2 = \\
&= (k+1)^2 \left[2(k+1)^2 - 1\right].
\end{aligned}$$

Oznacza to, że teza zachodzi również dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.4. (Patryk Michalski) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \geqslant 0$ zachodzi nierówność:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqslant \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Rozwiązanie. 1° Dla $n = 1$ otrzymujemy równość, czyli wówczas teza jest spełniona.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n = k \in \mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \frac{a+b}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leqslant \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k + b^k}{2}.$$

Wystarczy wykazać, że zachodzi:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k + b^k}{2} \leqslant \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}.$$

Po redukcji wyrazów podobnych przyjmuje to równoważną postać:

$$(a-b)(a^k - b^k) \geqslant 0.$$

Skoro liczby a, b są nieujemne, to obydwa powyższe czynniki są zawsze tego samego znaku, czyli nierówność jest spełniona. Oznacza to, że teza zachodzi dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.5. (Patryk Michalski) Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem. Udowodnić, że jeśli dla dowolnych liczb $a, b \in I$ odwzorowanie $f : I \to \mathbb{R}$ spełnia warunek:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

to dla każdej liczby naturalnej n oraz dowolnych liczb $x_1, \ldots, x_n \in I$ zachodzi nierówność:

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Rozwiązanie. 1° Dla $n = 1$ otrzymujemy równość, czyli teza jest spełniona. Dla $n = 2$ teza zachodzi z założenia.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n = k \in \mathbb{N}$, przy czym $k \geqslant 2$. Dla dowolnych $x_1, \ldots, x_{k+1} \in I$ mamy wówczas:

$$x := \frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k} + \tilde{x}\right),$$

$$\tilde{x} := \frac{(k-1)(x_1 + \ldots + x_k) + 2kx_{k+1}}{k(k+1)} = \frac{(n-1)x + x_{n+1}}{n},$$

przy czym $x, \tilde{x} \in I$. Stąd otrzymujemy:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right) + f(\tilde{x}).$$

Ponadto z założenia indukcyjnego:

$$f(\tilde{x}) \leqslant \frac{k-1}{k} f(x) + \frac{1}{k} f(x_{k+1}).$$

Wobec tego:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{k-1}{k} f(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} f(x_{k+1}),$$

co daje:

$$f(x) \leqslant \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{k+1})}{k+1}.$$

Oznacza to, że teza zachodzi dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.6. (Patryk Michalski) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n, dowolnego $p \in \mathbb{N}$ oraz dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty[$ zachodzi nierówność:

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^p \leqslant \frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}.$$

Rozwiązanie. Biorąc $f(x) = x^p$, $I = [0, \infty[$ w zadaniu 1.5 oraz korzystając z zadania 1.4 natychmiast dostajemy tezę. ♣

Zadanie 1.7. (Patryk Michalski) Udowodnić, że jeśli dla $n \in \mathbb{N}$ każda z liczb $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ma wartość 1 lub -1, to zachodzi:

$$\varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_n \sqrt{2}}} = 2 \sin\left[\frac{\pi}{4}\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}{2^{n-1}}\right)\right].$$

Rozwiązanie. 1° Dla $n = 1$ teza jest spełniona, bowiem $\pm\sqrt{2} = 2\sin(\pm\pi/4)$.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n = k \in \mathbb{N}$. Dla dowolnych $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1}$ spełniających warunki zadania mamy wówczas:

$$\varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_{k+1} \sqrt{2}}} = \varepsilon_1 \sqrt{2 + 2\sin\varphi},$$

gdzie

$$\varphi := \frac{\pi}{4}\left(\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k+1}}{2^{k-1}}\right).$$

Zauważmy, że spełniona jest następująca tożsamość trygonometryczna:

$$\sqrt{2 + 2\sin\varphi} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}} =$$
$$= \left|\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 2\left|\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right|.$$

W naszym przypadku moduł jest zbędny, bowiem $|\varphi| \leqslant \pi/2$. Po podstawieniu do wyjściowej równości otrzymujemy:

$$\varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_{k+1} \sqrt{2}}} = 2\varepsilon_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 2\sin\left[\varepsilon_1\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Po uwzględnieniu definicji φ wnioskujemy, że teza zachodzi dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.8. (Patryk Michalski) Niech l_n oznacza maksymalną liczbę części, na które można podzielić płaszczyznę n prostymi. Wykazać, że zachodzi:

$$l_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1).$$

Rozwiązanie. Proste $L_1, \ldots, L_n$ dzielą prostą L_{n+1} na co najwyżej $n+1$ odcinków i półprostych, a zatem $l_{n+1} \leqslant l_n + n + 1$. Stąd, skoro $l_1 = 2$, to na mocy nietrudnej indukcji mamy $l_n \leqslant 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$. Z kolei ograniczając się do takich układów prostych, które są parami nierównoległe oraz których żadna trójka nie przecina się w jednym punkcie, otrzymujemy równość zamiast powyższej nierówności. Stąd teza. ♣

Przykład 1.1. (Patryk Michalski) Bardzo często proste dowody indukcyjne przeprowadza się w sposób niejawny, zastępując wywód formalny wielokropkiem, na przykład:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = \ = 1 - \frac{1}{n!},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{1}{2^n},$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k} = 1 - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \ldots + (-1)^k\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] =$$
$$= (-1)^k\binom{n-1}{k},$$

$$x_n = 2x_{n-1} \quad \Rightarrow \quad x_n = 2x_{n-1} = 2^2x_{n-2} = 2^3x_{n-3} = \ldots = 2^{n-1}x_1.$$

Przykład 1.2. (Patryk Michalski) Dość często bywa tak, że mocniejsze twierdzenie może być (przynajmniej subiektywnie) łatwiejsze do udowodnienia. Dla przykładu rozważmy trzy twierdzenia:

Tw. 1.: $\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}$.

Tw. 2.: Jeśli $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{3}$ oraz dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n - c_{n-1}$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $c_n \neq 1$.

Tw. 3.: Jeśli $x_0 = x_1 = 1$ oraz dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $x_{n+1} = 2x_n - 9x_{n-1}$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $3 \nmid x_n$.

Niewątpliwie Tw. 1. jest najtrudniejsze, a Tw. 3. — najłatwiejsze do udowodnienia (wystarczy prosta indukcja względem n). Wykażemy, że zachodzi:

$$\text{Tw. 1.} \quad \Leftarrow \quad \text{Tw. 2.} \quad \Leftarrow \quad \text{Tw. 3.}$$

Zauważmy, że $x_n := 3^n c_n$ spełnia założenia Tw. 3., zatem mamy wynikanie Tw. 3. $\Rightarrow$ Tw. 2. Ponadto $c_n := \cos n\varphi$, gdzie $\varphi := \arccos\frac{1}{3}$, spełnia założenia Tw. 2. Gdyby zaś było spełnione $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, wtedy $c_n = \cos(2k\pi) = 1$, co prowadzi do sprzeczności. Mamy więc również wynikanie Tw. 2. $\Rightarrow$ Tw. 1. Stąd wynika żądana teza.

Otóż niekiedy dowód indukcyjny można uprościć lub wręcz umożliwić poprzez wzmocnienie dowodzonej tezy:

- Nierówność $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ trudno bezpośrednio udowodnić indukcyjnie, łatwo natomiast dowieść twierdzenie mocniejsze: $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

- Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ liczba $x_n := 1+3+\ldots+(2n-1)$ jest kwadratem liczby naturalnej. Dowód indukcyjny jest łatwiejszy dla mocniejszej tezy: $x_n = n^2$.

- Żadnego z oszacowań $\frac{1}{\sqrt{3n}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ dla $a_n := \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ nie da się dowieść indukcyjnie, da się zaś dowieść mocniejszą tezę: $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Zadanie 1.9. (Patryk Michalski) Zasada minimum dla zbioru $\mathbb{N}$: Każdy niepusty podzbiór $F \subset \mathbb{N}$ ma element najmniejszy.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że F nie ma elementu najmniejszego. Weźmy zbiór $T := \{n \in \mathbb{N} : \forall_{f \in F} n < f\}$. Wtedy:

1° $1 \in T$, gdyż w przeciwnym razie $1 \in F$, czyli 1 byłoby elementem najmniejszym zbioru F.

2° $n \in T \Rightarrow n+1 \in T$, gdyż w przeciwnym razie liczba $n+1$ byłaby elementem najmniejszym zbioru F.

Stąd zasada indukcji daje $T = \mathbb{N}$, lecz $n \in F \Rightarrow n \notin T$, a zatem $F \subset \mathbb{N} \backslash T = \varnothing$, co prowadzi do sprzeczności. ♣

Uwaga. Łatwo też pokazać, że zasada minimum implikuje zasadę indukcji, czyli może być przyjęta jako aksjomat równoważny z zasadą indukcji. Istotnie, niech $T \subset \mathbb{N}$ spełnia 1° i 2°, ponadto przypuśćmy, że $F := \mathbb{N} \backslash T \neq \varnothing$. Niech $n \in F$ będzie najmniejszym elementem zbioru F. Wtedy $n > 1$ (gdyż $1 \in T$, czyli $1 \notin F$) oraz $n - 1 \notin F$, a więc $n - 1 \in T$. Stąd wobec 2° zachodzi $n \in T$, co jest sprzeczne z założeniem, że $n \in F$.

1.2 Mocna zasada indukcji

Mocna Zasada Indukcji (MZI). Jeżeli podzbiór $T \subset \mathbb{N}$ spełnia warunki:

1^* $1 \in T$,

2^* $\forall_{n \in \mathbb{N}} \overline{1, n} \subset T \Rightarrow n + 1 \in T$,

to $T = \mathbb{N}$.
Oczywiście założenia MZI są słabsze od założeń ZI, tak więc faktycznie ZI jest bespośrednią konsekwencją MZI, tzn. MZI jest mocniejsza od ZI.

Dowód. Weźmy zbiór pomocniczy $T' := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \overline{1, n} \subset T\}$. Wówczas:

1° $1 \in T'$ (oczywiste) oraz

2° $n \in T' \Rightarrow n + 1 \in T'$, gdyż $n \in T' \Leftrightarrow \overline{1, n} \subset T \overset{2^*}{\Rightarrow} n + 1 \in T$, czyli $\overline{1, n+1} \subset T \Leftrightarrow n + 1 \in T'$,

a więc T' spełnia założenia ZI. Stąd $T' = \mathbb{N}$, czyli $\forall_{n \in \mathbb{N}} \overline{1, n} \subset T$, skąd $T = \mathbb{N}$. ♣

Uwaga. Obydwa warunki 1^* oraz 2^* można dla wygody zastąpić jednym:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \overline{1, n-1} \subset T \Rightarrow n \in T.$$

Zadanie 1.10. (Patryk Michalski) Udowodnić, że jeśli $x_1 = 1$ oraz $x_{n+1} = 1 + x_1 + \ldots + x_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to $x_n = 2^{n-1}$

Rozwiązanie. 1^* Dla $n = 1$ teza jest spełniona z definicji.

2^* Przyjmijmy, że teza zachodzi dla wszystkich $n \in \overline{1, k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$x_{k+1} = 1 + x_1 + \ldots + x_k = 1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j = 1 + \frac{1 - 2^k}{1 - 2} = 2^k.$$

Oznacza to, że teza zachodzi dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.11. (Patryk Michalski) Udowodnić, że jeśli $x_1 = 1$ oraz $x_{n+1} = \frac{x_1 + \ldots + x_n + (x_n + 1)}{n+1}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

Rozwiązanie. 1^* Dla $n = 1$ teza jest spełniona z definicji.

2^* Przyjmijmy, że teza zachodzi dla wszystkich $n \in \overline{1,k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$x_{k+1} = \frac{x_1 + \ldots + x_k + (x_k + 1)}{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(n + 2 + \frac{k}{2!} + \frac{k-1}{3!} + \ldots \frac{2}{k!}\right) =$$
$$= \frac{k+2}{k+1} + \left(\frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right) - \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k-1}{k!}\right).$$

Przypomnijmy, że jest spełnione:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k-1}{k!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = \; = 1 - \frac{1}{k!}.$$

Stąd po podstawieniu dostajemy:

$$x_{k+1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(k+1)!}.$$

Oznacza to, że teza zachodzi dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.12. (Patryk Michalski) Udowodnić, że jeśli $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ oraz $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to $x_n = 2^n + (-1)^n$.

Rozwiązanie. 1^* Dla $n = 1$ oraz $n = 2$ teza jest spełniona z definicji.

2^* Przyjmijmy, że teza zachodzi dla wszystkich $n \in \overline{1,k}$, gdzie $k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$x_{k+1} = x_k + 2x_{k-1} = 2^k + (-1)^k + 2 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-1} = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}.$$

Oznacza to, że teza zachodzi dla $n = k + 1$.

♣

Zadanie 1.13. (Patryk Michalski) Udowodnić, że jeśli $x_n \geqslant 0$ oraz $x_{n+2} \leqslant \lambda \cdot \max\{x_n, x_{n+1}\}$ dla $\lambda \in]0,1]$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to istnieje $C \geqslant 0$ takie, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $x_n \leqslant C \cdot \lambda^{n/2}$.

Rozwiązanie. Dobierzmy C tak, by żądane oszacowanie zachodziło dla $n = 1$ i $n = 2$:

$$C := \max\{x_1\lambda^{-1/2}, x_2\lambda^{-1}\}.$$

Stosując MZI sprawdzamy łatwo, że zachodzi ono wówczas dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ♣

Uwaga. Z MZI wynika bezpośrednio jeszcze inna, niekonwencjonalna zasada indukcji:

$$\begin{pmatrix} T \subset \mathbb{N}, & \\ 1 \in T, \; 2 \in T, & \\ \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \overline{n, n+1} \subset T \Rightarrow n+2 \in T \end{pmatrix} \Rightarrow T = \mathbb{N},$$

dająca schemat dowodu indukcyjnego szczególnie wygodnego np. do badania ciągów określonych przez rekurencję postaci $x_{n+2} = \varphi(x_n, x_{n+1})$; patrz powyższe dwa zadania. Trywialne jest uogólnienie takiej zasady indukcji, polegające na zastąpieniu liczby 2 dowolną liczbą $k \in \mathbb{N}$ (dla $k = 1$ mamy wtedy zwykłą ZI). Inne, równie trywialne uogólnienie daje zastąpienie zbioru $\mathbb{N}$ zbiorem postaci $\overline{l, \infty}$ dla $l \in \mathbb{Z}$.

1.3 Ważne nierówności

Zadanie 1.14. (Aleksandra Oszmian) Która z następujących dwóch liczb jest większa?

$$\sqrt[10000]{10001}, \quad \sqrt[9999]{10000}$$

Rozwiązanie. Niech $n = 10000$ oraz ? oznacza jedną z nierówności - $<$ lub $>$. Wówczas:

$$
\begin{gathered}
(n+1)^{\frac{1}{n}} \ ? \ n^{\frac{1}{n-1}} \\
(n+1)^{n-1} \ ? \ n^n \\
1 \ ? \ \tfrac{n^n}{(n+1)^{n-1}}
\end{gathered}
$$

Chcemy skorzystać z nierówności Bernoulliego:

$$\tfrac{n^n}{(n+1)^{n-1}} = (n+1)(\tfrac{n}{n+1})^n = (n+1)(1-\tfrac{1}{n+1})^n > (n+1)(1-\tfrac{n}{n+1}) = n+1-n = 1.$$

Okazuje się więc, że ? to $<$, a zatem $10001^{\frac{1}{10000}} < 10000^{\frac{1}{9999}}$. ♣

Zadanie 1.15. (Patryk Michalski) Nierówność Bernoulliego. Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ spełniających $x \geqslant -1$ oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, ponadto nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $n=1$ lub $x=0$.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ otrzymujemy równość, czyli teza jest spełniona.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n=k\in\mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx) = 1+kx+x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x.$$

Oznacza to, że teza zachodzi dla $n=k+1$.

♣

Zadanie 1.16. (Patryk Michalski) Uogólniona nierówność Bernoulliego. Dla wszystkich $a,b\in\mathbb{R}$ spełniających $a>0$, $a+b\geqslant 0$ oraz dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi $(a+b)^n \geqslant a^n + na^{n-1}b$.

Rozwiązanie. Z nierówności Bernoulliego wynika:

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant a^n\left(1+n\cdot\frac{b}{a}\right) = a^n + na^{n-1}b.$$

♣

Zadanie 1.17. (Patryk Michalski) Udowodnić, że jeśli $x_1\cdot\ldots\cdot x_n = 1$ oraz $x_1,\ldots,x_n>0$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$, to $x_1+\ldots+x_n\geqslant n$.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ otrzymujemy równość, czyli teza jest spełniona.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n=k\in\mathbb{N}$. Załóżmy dodatkowo bez straty ogólności, że $0<x_1\leqslant\ldots\leqslant x_k\leqslant x_{k+1}$. Skoro $x_1\cdot\ldots\cdot x_{k+1}=1$, to musi być spełnione $x_1\leqslant 1\leqslant x_{k+1}$. Wobec tego mamy:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{k+1} = \underbrace{(x_1x_{k+1}+x_2+\ldots+x_k)}_{\geqslant k \text{ z zał. ind.}} + \underbrace{(1-x_1)(x_{k+1}-1)}_{\geqslant 0} + 1 \geqslant k+1.$$

Oznacza to, że teza zachodzi dla $n=k+1$.

♣

Zadanie 1.18. (Patryk Michalski) Nierówność Cauchy'ego. Dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ oraz wszystkich $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ spełniających $a_1,\ldots,a_n>0$ zachodzi:

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} =: A(a_1,\ldots,a_n) \geqslant G(a_1,\ldots,a_n) := (a_1\cdot\ldots\cdot a_n)^{1/n},$$

przy czym nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=\ldots=a_n$.

Rozwiązanie 1. Dowód w wersji Cauchy'ego opiera się na następującej niekonwencjonalnej zasadzie indukcyjnej:

$$\left(\begin{array}{l} T \subset \mathbb{N}, \\ 1 \in T, \\ \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad n \in T \Rightarrow 2n \in T, \\ \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad n \in T \Rightarrow \overline{1, n} \subset T \end{array}\right) \Rightarrow T = \mathbb{N}.$$

1° Twierdzenie Z_1 jest trywialne (otrzymujemy równość).

2° Dowodzimy $Z_n \Rightarrow Z_{2n}$:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) = G(\sqrt{a_1 a_2}, \sqrt{a_3 a_4}, \ldots, \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}) \leqslant A(\sqrt{a_1 a_2}, \sqrt{a_3 a_4}, \ldots, \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}) \leqslant$$
$$\leqslant A(\tfrac{a_1+a_2}{2}, \tfrac{a_3+a_4}{2}, \ldots, \tfrac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}) = A(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}).$$

Ostatnia nierówność wynika z monotoniczności średniej arytmetycznej wraz z nierównością $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ spełniających $a, b > 0$. Nietrudno wykazać, że nierówność ta staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

3° Dowodzimy $Z_n \Rightarrow Z_m$ dla $m \leqslant n$. Przyjmijmy $a := G(a_1, \ldots, a_m)$. Mamy wówczas:

$$G(a_1, \ldots, a_m) = G(a_1, \ldots, a_m, \underbrace{a, \ldots, a}_{n-m \text{ razy}}) \leqslant A(a_1, \ldots, a_m, a, \ldots, a) = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_m + (n-m)a) =$$
$$= \frac{m}{n} A(a_1, \ldots, a_m) + \frac{m-n}{n} G(a_1, \ldots, a_m),$$

co daje natychmiast $A(a_1, \ldots, a_m) \geqslant G(a_1, \ldots, a_m)$.

♣

Rozwiązanie 2. Przeprowadzimy dowód indukcyjny z wykorzystaniem uogólnionej nierówności Bernoulliego. Przyjmijmy $A_n := A(a_1, \ldots, a_n)$ oraz $G_n := G(a_1, \ldots, a_n)$. Wykażemy, że zachodzi $Z_n \Rightarrow Z_{n+1}$. Niech $\Delta := a_{n+1} - A_n$, wtedy $A_{n+1} = A_n + \frac{\Delta}{n+1}$, więc z uogólnionej nierówności Bernoulliego:

$$(A_{n+1})^{n+1} = \left(A_n + \frac{\Delta}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant (A_n)^{n+1} + (A_n)^n \Delta = (A_n)^n (A_n + \Delta) =$$
$$= (A_n)^n a_{n+1} \geqslant (G_n)^n a_{n+1} = (G_{n+1})^{n+1}.$$

♣

Rozwiązanie 3. Tezę otrzymujemy bezpośrednio po zastosowaniu nierówności z zadania 1.17 do wielkości $x_i := a_i / G(a_1, \ldots, a_n)$, gdzie $i \in \overline{1, n}$. ♣

Zadanie 1.19. (Patryk Michalski) Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ spełniających $a_1, \ldots, a_n > 0$ zachodzi:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} =: H(a_1, \ldots, a_n) \leqslant G(a_1, \ldots, a_n) := (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n}.$$

Rozwiązanie. Z nierówności Cauchy'ego wynika:

$$H(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{A(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n})} \leqslant \frac{1}{G(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n})} = G(a_1, \ldots, a_n).$$

♣

Uwaga. Niech $A_p(a_1,\ldots,a_n) := \left(\frac{a_1^p+\ldots+a_n^p}{n}\right)^{1/p}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$, $a_1,\ldots,a_n > 0$. Wtedy $A_1 = A$ jest średnią arytmetyczną, a $A_{-1} = H$ — średnią harmoniczną. Można wykazać, że $\lim_{p\to 0} A_p(a_1,\ldots,a_n) = G(a_1,\ldots,a_n) =: A_0(a_1,\ldots,a_n)$, i że tak otrzymana funkcja $\mathbb{R} \ni p \mapsto A_p(a_1,\ldots,a_n)$ jest, przy ustalonych $a_1,\ldots,a_n$, rosnącą funkcją p. Wymaga to metod rachunku różniczkowego omówionych w dalszej części zbioru.

Zadanie 1.20. (Patryk Michalski) Nierówność Schwarza-Cauchy'ego. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)^{1/2},$$

ponadto nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $i \in \overline{1,n}$ jest spełnione $y_i = \lambda x_i$ (przyjmujemy przy tym, że nie wszystkie spośród $x_1,\ldots,x_n$ oraz nie wszystkie spośród $y_1,\ldots,y_n$ są równe zero).

Rozwiązanie. Dowodzona nierówność wynika bezpośrednio z tożsamości Lagrange'a:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Wykażmy tę tożsamość, rozpisując obydwa składniki po lewej stronie znaku równości:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 - \sum_{i,j=1}^n x_i y_i x_j y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n x_i^2 y_j^2 - \sum_{i,j=1}^n x_i y_j x_j y_i =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Jeżeli istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $i \in \overline{1,n}$ jest spełnione $y_i = \lambda x_i$, to z tożsamości Lagrange'a wynika, że nierówność Schwarza-Cauchy'ego staje się równością (suma po prawej stronie znaku równości w tożsamości znika). By nierówność stawała się równością, dla wszystkich $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$ musi być spełnione:

$$\sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 0.$$

Oznacza to, że dla dowolnych $i,j \in \overline{1,n}$ zachodzi $x_i y_j - x_j y_i = 0$. Jeżeli dla pewnego $i \in \overline{1,n}$ mamy $x_i = 0$, to musi być również $y_i = 0$, bo istnieje $j \in \overline{1,n}$, $j \neq i$ takie, że $x_j \neq 0$. Wobec tego dla dowolnego $i \in \overline{1,n}$ istnieje takie $\lambda_i \in \mathbb{R}$, że $y_i = \lambda_i x_i$. Stąd dla dowolnych $i,j \in \overline{1,n}$ mamy $x_i\lambda_j x_j - x_j \lambda_i x_i = x_i x_j(\lambda_i - \lambda_j) = 0$, czyli nierówność staje się równością dla $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda$. ♣

Zadanie 1.21. (Patryk Michalski) Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}$ spełniających $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ zachodzi:

$$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n),$$

przy czym nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n$ lub $b_1 = \ldots = b_n$.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ otrzymujemy równość, czyli teza jest spełniona.

2° Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n = k \in \mathbb{N}$. Mamy wówczas:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} b_j + b_{k+1}\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} b_j + b_{k+1}\right) + \sum_{i=1}^{k}(a_{k+1} - a_i)(b_{k+1} - b_i) \leqslant$$

$$\leqslant n\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + (n+1)a_{k+1}b_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i b_i = (n+1)\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i.$$

Oznacza to, że teza zachodzi dla $n = k + 1$. Zauważmy, że z postaci składnika dodanego powyżej w pierwszym kroku do lewej strony nierówności wynika, że dowodzona nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n$ lub $b_1 = \ldots = b_n$.

♣

1.4 Inne zadania na zasadę indukcji

Zadanie 1.22. (Aleksandra Oszmian) Wieża Hanoi: łamigłówka polega na przenoszeniu wieży z klocków z lewej na prawą po jednym klocku tak, by po drodze większy klocek nigdy nie leżał na mniejszym.
Znaleźć odpowiednią rekurencję oraz wykazać indukcyjnie, że minimalna liczba ruchów potrzebna do przeniesienia wieży z n klocków wynosi $2^n - 1$.

Dowód. Równanie rekurencyjne okreslające liczbę kroków potrzebnych do rozwiązania problemu dla n krążków:

$$L(n) = L(n-1) + 1 + L(n-1)$$

Po pierwsze, $L(n) \leqslant L(n-1) + 1 + L(n-1)$.
W pierwszym kroku przekładamy $n-1$ krążków na jeden ze słupków, co wymaga co najmniej $L(n-1)$ ruchów. Następnie n-ty krążek przekładamy na drugi słupek, co wymaga jednego ruchu. Pozostałe $n-1$ krążków przekładamy na n-ty krążek, co wymaga co najmniej $L(n-1)$ ruchów.
Z drugiej strony, $L(n) \geqslant L(n-1) + 1 + L(n-1)$. Wynika to z następującego rozumowania:
Aby móc poruszyć n-ty krążek, trzeba najpierw zdjąć wszystkie leżące na nim krążki, tak by po ich zdjęciu jeden ze słupków pozostał wolny. A więc ze słupka 1 przekładamy $n-1$ krążków na słupek 3. Do momentu gdy na pierwszym słupku pozostanie tylko n-ty krążek nie ma znaczenia, czy rzeczywiście się on tam znajduje, a więc do tego momentu sytuacja upraszcza się do rozwiązania problemu wież Hanoi dla $n-1$ krążków (którego minimalna liczba ruchów wynosi $L(n-1)$). Na przełożenie n-tego krążka potrzeba jednego ruchu. Po jego przełożeniu znów trzeba przełożyć krążki 1, 2, ... , $n-1$,
co wymaga co najmniej $L(n-1)$ ruchów. Zatem $L(n) = L(n-1) + 1 + L(n-1)$.
Znalezione równanie rekurencyjne możemy przedstawić w postaci jawnej.
Piszemy $L(n) = 1 + 2 \cdot L(n-1) \iff L(n) + 1 = 2 + 2 \cdot L(n-1) = 2 \cdot (L(n-1) + 1)$. Niech $L_2(n) = L(n) + 1$.
Wówczas $L_2(n) = 2L_2(n-1)$. Jest to równanie określające ciąg geometryczny o ilorazie równym 2 takie, że

$$L(1) = L_2(1) = 2L_2(2) = 4, \ldots, L_2(n) = 2^n$$

A zatem $L(n) = 2^n - 1$, co należało wykazać. ♣

Zadanie 1.23. (Patryk Michalski) Na płaszczyźnie leży n kół o jednakowych promieniach i rozłącznych wnętrzach. Wykazać, że można tak pokolorować te koła 4 barwami, by żadna para kół stycznych nie była pomalowana tym samym kolorem.

Rozwiązanie. Teza jest oczywista dla $n \leqslant 4$. Przyjmijmy, że Z_n zachodzi i dane są koła $K_1, \ldots, K_{n+1}$. Niech koło K_{n+1} ma środek najbardziej oddalony od ustalonego punktu P_0. Wtedy K_{n+1} jest styczne do najwyżej 3 kół spośród $K_1, \ldots, K_n$. Stąd wynika, że zachodzi Z_{n+1}. ♣

Zadanie 1.24. (Patryk Michalski) Niech k_n będzie maksymalną liczbą części, na które można podzielić sferę n okręgami. Wykazać, że $k_n = n^2 - n + 2$.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że Z_n zachodzi i dane są okręgi $C_1, \ldots, C_n$. Okręgi $C_1, \ldots, C_n$ dzielą okrąg C_{n+1} na co najwyżej $2n$ łuków, więc mamy:

$$k_{n+1} \leqslant k_n + 2n \leqslant n^2 - n + 2 + 2n = n^2 + n + 2 = (n+1)^2 - (n+1) + 2.$$

Oznacza to, że zachodzi Z_{n+1}. Dla okręgów wielkich na sferze nierówność staje się równością, skąd wynika teza. ♣

1.5 Własności funkcji

Zadanie 1.25. (Arkadiusz Kobus) Udowodnić, że jeżeli $f : X \to X$ spełnia $\forall x \in X\ \exists n_x \in \mathbb{N} : f^{n_x}(x) = x$, to f jest bijekcją. Definiujemy f^n w następujący sposób: $f^0 := \mathrm{id}_X$ oraz $f^{n+1} := f \circ f^n$.

Rozwiązanie. f jest suriekcją, bo dla dowolnego $x \in X$ możemy znaleźć $x' \in X$, które spełnia $f(x') = x$, biorąc $x' = f^{n_x - 1}(x)$. Sprawdźmy czy f jest iniekcją. Załóżmy, że $f(x) = f(x')$. Wiemy, że $x = f^{n_x}(x)$, ale to oznacza również, że $x = f^{n_x}(x) = f^{n_x}(f^{n_x}(x)) = f^{2n_x}(x)$. Iterując ten argument otrzymamy, że $x = f^{kn_x}(x)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, czyli w szczególności również $x = f^{n_{x'} n_x}(x)$. Podobnie możemy zrobić dla x' otrzymując $x' = f^{n_{x'} n_x}(x')$. Korzystając z założenia $f(x) = f(x')$ otrzymamy, że $f^k(x) = f^k(x')$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, co ostateczne pozwala nam zapisać $x = f^{n_{x'} n_x}(x) = f^{n_{x'} n_x}(x') = x'$, czyli f jest iniekcją. ♣

Zadanie 1.26. (Arkadiusz Kobus) Udowodnić, że dla funkcji $f : X \to Y,\ g : Y \to X$ zachodzi:

(a) $f \circ g$ jest iniekcją $\implies$ g jest iniekcją

(b) $f \circ g$ jest suriekcją $\implies$ f jest suriekcją

(c) $f \circ g$ jest bijekcją $\implies$ f jest suriekcją oraz g jest iniekcją

Rozwiązanie.

(a) Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że $f \circ g$ jest iniekcją oraz g nie jest iniekcją, więc istnieją elementy $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$ dla których zachodzi $g(y_1) = g(y_2)$. Stosując do tej równości obustronnie funkcję f otrzymujemy $f(g(y_1)) = f(g(y_2))$, czyli $f \circ g$ nie jest iniekcją, co prowadzi do sprzeczności z założeniem.

(b) Jeżeli $f \circ g$ jest suriekcją to oznacza, że dla każdego $y \in Y$ istnieje $y' \in Y$, takie że $f(g(y')) = y$. Nie mniej jednak widzimy od razu, że f też jest suriekcją, bo dla każdego $y \in Y$ istnieje $x \in X$, taki że $f(x) = y$, mianowicie należy wybrać $x = g(y')$.

(c) Trywialne na mocy poprzednich podpunktów, natomiast wniosek ten będzie istotny w zadaniu 1.27.

♣

Zadanie 1.27. (Arkadiusz Kobus) Udowodnić, że dla funkcji $f : X \to Y$ zachodzi:

(a) f jest iniekcją $\iff$ f ma lewą odwrotność (czyli istnieje $g : Y \to X$ takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_X$)

(b) f jest suriekcją $\iff$ f ma prawą odwrotność (czyli istnieje $g : Y \to X$ takie, że $f \circ g = \mathrm{id}_Y$)

Rozwiązanie.

(a) Jeżeli f jest iniekcją to możemy wybrać dowolny element $x_0 \in X$, a następnie skonstruować dobrze zdefiniowaną lewą odwrotność w następujący sposób:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) \text{ jeżeli } y \in f(X) \\ x_0 \text{ jeżeli } y \notin f(X) \end{cases}$$

Jeżeli zaś f ma lewą odwrotność g, to wtedy $g \circ f$ jest bijekcją, i na mocy 1.26.c wynika, że f jest iniekcją.

(b) Jeżeli f jest suriekcją to oznacza, że dla każdego $y \in Y$ zbiór $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$. Wybierzmy dowolny element tego zbioru (nazwijmy go x) i zdefiniujmy wówczas $g(y) = x$. Tak zdefiniowane g jest prawą odwrotnością f. Jeżeli zaś f ma prawą odwrotność, to na mocy 1.26.c wynika, że f jest suriekcją.

♣

Uwaga. W konstrukcjach lewych i prawych odwrotności skorzystaliśmy z tego, że jeżeli jakiś zbiór jest niepusty, to możemy wybrać z niego jakiś element i używać w dalszych rachunkach. Procedura ta wydaje się nie być podejrzana, natomiast korzystając z niej można udowodnić twierdzenia, które wielu matematykom wydawały się być paradoksalne, stąd też podczas dowodów w dziedzinie podstaw matematyki przyjął się zwyczaj pisania explicite, kiedy używa się tej techniki. Aksjomat, który pozwala na wykonywanie takich rachunków nazywa się aksjomatem wyboru. Matematycy, którzy nie używają aksjomatu wyboru zazwyczaj wykorzystują aksjomatykę ZF (od nazwisk Ernsta Zermela i Abrahama Fraenkla, którzy skonstruowali komplet aksjomatów wykorzystywanych w teorii mnogości), zaś matematycy wykorzystujący aksjomat wyboru korzystają z aksjomatyki ZFC (ZF + Choice Axiom). Naszych konstrukcji lewych i prawych odwrotności nie można dokonać korzystając z aksjomatyki ZF, ponieważ istnieje tych odwrotności jest równoważne aksjomatowi wyboru. Poza dziedziną podstaw matematyki aksjomat wyboru jest zawsze zakładany implicite ze względu na jego przydatność.

Zadanie 1.28. (Arkadiusz Kobus) Udowodnić, że dla $f : X \to Y$ oraz $g_1, g_2 : Y \to X$ takie, że $g_1 \circ f = \mathrm{id}_X$ oraz $f \circ g_2 = \mathrm{id}_Y$, zachodzi $g_1 = g_2$.

Rozwiązanie.

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_X \circ g_2 = g_2$$

♣

Uwaga. Funkcję, która jest zarówno lewą jak i prawą odwrotnością f nazywamy odwrotnością f i oznaczamy jako f^{-1}. Korzystając z zadania 1.27 otrzymujemy, że każda bijekcja ma odwrotność. Zbiory, między którymi istnieje przynajmniej jedna bijekcja, nazywamy równolicznymi. Na mocy zadania 1.28 równoliczność zbiorów jest relacją równoważności, czyli jest to relacja zwrotna, przechodnia i symetryczna. Relacje równoważności są ważne, ponieważ dzielą nam obiekty na tak zwane klasy równoważności (zwane również klasami abstrakcji). Obiekty z tej samej klasy są dla danej relacji równoważne, a sama klasa staje się elementem przestrzeni ilorazowej, czyli zbioru klas równoważności. Często działania na klasach równoważności są wygodniejsze niż działania na prostszych elementach, przykładowo liczby rzeczywiste można definiować jako klasy równoważności zbieżnych ciągów liczb wymiernych, a wektory styczne do powierzchni jako klasy równoważności krzywych na tej powierzchni. Klasę równoważności dla relacji $\sim$ opisanej na zbiorze S do której należy element $x \in S$ oznaczamy $[x]_\sim$, a przestrzeń ilorazową oznaczamy $S/\sim$. Teoria mnogości, czyli współczesna teoria zbiorów, została stworzona do ścisłego opisu relacji równoliczności, która była prosta do zrozumienia dla zbiorów skończonych, jednak opis równoliczności zbiorów nieskończonych jest wysoce nietrywialny. Klasy równoważności relacji równoliczności nazywamy liczbami kardynalnymi, a zamiast mówić, że jakiś zbiór należy do liczby kardynalnej, mówimy że jego moc jest równa danej liczbie. Liczby kardynalne dla zbiorów skończonych to liczby naturalne (dla zbioru pustego 0), a dla zbiorów nieskończonych istnieje ogromna rodzina liczb kardynalnych, ale najważniejsze z nich to moc zbioru liczb naturalnych (na zbiory o tej mocy mówimy że są przeliczalne) oraz moc zbioru liczb rzeczywistych, którą nazywa się continuum. Teraz spróbujemy udowodnić kilka nieoczywistych równoliczności.

Zadanie 1.29. (Arkadiusz Kobus) Podać przykład bijekcji $f : X \to Y$ oraz wyznaczyć f^{-1}:

(a) $X =]0,1[, Y = [-2,2] \backslash \{-1,1\}$

(b) $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{Z} \backslash 3\mathbb{Z}$ (dla liczb rzeczywistych k, m definiujemy $k\mathbb{Z} + m := \{kn + m \mid n \in \mathbb{Z}\}$)

(c) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$

(d) $X = \mathbb{N}^2, Y = \mathbb{N}$

Rozwiązanie.

(a) Zbiór Y składa się z trzech spójnych składowych: $[-2,2] \backslash \{-1,1\} = [-2,-1[\cup]-1,1[\cup]1,2]$. Jedna składowa jest otwarta, zaś dwie są jednostronnie otwarte. Spróbujmy podzielić zbiór X na trzy składowe tego samego rodzaju, przykładowo $]0,1[= \left]0, \frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\cup \left[\frac{2}{3}, 1\right[$. Skonstruujmy teraz bijekcję pomiędzy składowymi odpowiedniego rodzaju. Najprostszym wyborem jest funkcja liniowa, więc dla bijekcji $f_1 : \left]0, \frac{1}{3}\right] \to [-2,-1[$ wystarczy narzucić $f_1(0) = -1$ oraz $f_1\left(\frac{1}{3}\right) = -2$, rozszerzyć do funkcji liniowej, a następnie usunąć punkt $(0,-1)$. Równanie na f_1 wygląda następująco: $f_1(x) = -3x - 1$, funkcja odwrotna wyraża się wzorem $f_1^{-1}(y) = \frac{-y-1}{3}$. Bijekcje $f_2 : \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\to]-1,1[$ oraz $f_3 : \left[\frac{2}{3}, 1\right[\to]1,2]$ konstruujemy analogicznie. Ostatecznie:

$$f(x) = \begin{cases} -3x-1 \text{ na } \left]0, \frac{1}{3}\right] \\ 6x-3 \text{ na } \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ -3x+4 \text{ na } \left[\frac{2}{3}, 1\right[\end{cases} \qquad f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{-y-1}{3} \text{ na } [-2,-1[\\ \frac{y+3}{6} \text{ na }]-1,1[\\ \frac{-y+4}{3} \text{ na }]1,2] \end{cases}$$

(b) Zbiór Y najłatwiej scharakteryzować rozpatrując następujący podział (modulo 3): $\mathbb{Z} = (3\mathbb{Z}) \cup (3\mathbb{Z}+1) \cup (3\mathbb{Z}+2)$, więc $Y = (3\mathbb{Z}+1) \cup (3\mathbb{Z}+2)$. Z drugiej strony zbiór X można podzielić modulo 2: $\mathbb{Z} = (2\mathbb{Z}) \cup (2\mathbb{Z}+1)$. Spróbujmy znaleźć bijekcje $f_1 : (2\mathbb{Z}) \to (3\mathbb{Z}+1)$ oraz $f_2 : (2\mathbb{Z}+1) \to (3\mathbb{Z}+2)$. Prostym przykładem będzie:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+2}{2} \text{ na } 2\mathbb{Z} \\ \frac{3x+1}{2} \text{ na } 2\mathbb{Z}+1 \end{cases} \qquad f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{2y-2}{3} \text{ na } 3\mathbb{Z}+1 \\ \frac{2y-1}{3} \text{ na } 3\mathbb{Z}+2 \end{cases}$$

(c) Podzielmy zbiór X na dwie części: $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. W ten sposób uzyskujemy przeliczalnie wiele spójnych składowych zbioru X które w sposób identycznościowy możemy przekształcić w Y, to znaczy $f_1 : \mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z} \ni x \mapsto x \in Y$. W ten sposób w zbiorze Y nie zobrazowaliśmy jeszcze $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})\backslash(\mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}) = \frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z} = \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$. Zarówno ta część, jak i $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \subset X$ są przeliczalne, a przykładową bijekcją niech będzie $f_2 : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \ni x \mapsto 2x + \frac{1}{2} \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ na } \mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ 2x+\frac{1}{2} \text{ na } \frac{1}{2}\mathbb{Z} \end{cases} \qquad f^{-1}(y) = \begin{cases} y \text{ na } \mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ \frac{2y-1}{4} \text{ na } \frac{1}{2}+\mathbb{Z} \end{cases}$$

(d) f najłatwiej wyobrazić sobie w postaci tabelki:

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	$\dots$
1	1	3	6	10	15	$\dots$
2	2	5	9	14	$\ddots$	$\ddots$
3	4	8	13	$\ddots$	$\ddots$	
4	7	12	$\ddots$	$\ddots$		
5	11	$\ddots$	$\ddots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				

$f(1,n)$ jest ciągiem liczb znanym jako liczby trójkątne, spełniają one relację:

$$f(1,n) = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n-1)}{2}$$

z czego zamkniętą formułę można łatwo udowodnić indukcyjnie. Korzystając z tej relacji możemy zapisać rekurencyjny wzór na f:

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 + \frac{m(m-1)}{2} \text{ dla } n=1 \\ f(m+1,n-1)+1 \text{ dla } n \neq 1 \end{cases}$$

Iterując powyższy wzór rekurencyjny $n-1$ razy otrzymamy:

$$f(m,n) = f(m+n-1,1)+n-1 = \frac{(m+n-1)^2-(m+n-1)+2}{2} + n - 1 = \frac{(m+n)^2-3m-n+2}{2}$$

Żeby znaleźć $f^{-1}(k)$ spróbujmy znaleźć najpierw indeks przekątnej r na której leży k w tabeli. Wynika z tego układ nierówności:

$$\frac{r(r-1)}{2} < k \leqslant \frac{r(r+1)}{2}$$

Rozwiązując lewą nierówność na r otrzymamy:

$$\frac{r(r-1)}{2} < k \iff r^2 - r - 2k < 0 \iff \frac{1-\sqrt{1+8k}}{2} < r < \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

A prawą nierówność:

$$k \leqslant \frac{r(r+1)}{2} \iff r^2 + r - 2k \geqslant 0 \iff r \leqslant \frac{-1-\sqrt{1+8k}}{2} \vee r \geqslant \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

Koniunkcja obu warunków da nam:

$$\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2} \leqslant r < \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

Widać, że szerokość tego przedziału wynosi 1, a że przedział jest jednostronnie otwarty to zawsze istnieje tylko jedno całkowite r należące do tego przedziału, co pozwala nam wyrazić r w sposób:

$$r = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rceil$$

Wiemy, że najmniejszą wartością funkcji znajdującą się na r-tej przekątnej to $f(r,1) = \frac{r^2-r+2}{2}$. Zaczynając od tej wartości możemy dotrzeć do liczby k poruszając się po przekątnej $l = k - f(r,1)$ razy. Śledząc współrzędne podczas tego procesu z punktu $(r,1)$ dotrzemy do punktu $(r-l, 1+l)$. Możemy podstawić znane wartości i otrzymać f^{-1} w postaci:

$$f^{-1}(k) = (r-l, 1+l) = (r + f(r,1) - k, k + 1 - f(r,1)) = \left(\frac{r^2+r+2}{2} - k, k - \frac{r^2+r}{2}\right)$$

z czego podstawienie wartości r jedynie zmniejszy czytelność wzoru, więc zostawimy wynik w takiej postaci.

♣

Zadanie 1.30. (Aleksandra Oszmian) Niech $f : X \to X$ będzie odwzorowaniem. Wykazać następującą równoważność:

$$[f \text{ jest bijekcją}] \iff [\forall A_1, A_2 \subset X \quad f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)].$$

Rozwiązanie. Aby udowodnić równoważność, należy wykazać oba wynikania, "$\Longleftarrow$" oraz "$\Longrightarrow$".

Najpierw dowiedziemy równość $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ przy założeniu injektywności f. Zwykle by pokazać równość zbiorów, wykazuje się zawierania w obie strony - "$\subseteq$" oraz "$\supseteq$".

($\subseteq$) Niech $a \in A_1 \cap A_2$, tzn. $a \in A_1$ oraz $a \in A_2$. Oczywiście więc $f(a) \in f(A_1)$ oraz $f(a) \in f(A_2)$. Zatem $a \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Zauważmy, ze nie założenie o injektywności f nie było potrzebne.

($\supseteq$) Weźmy $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Oznacza to, że istnieją a_1 i a_2 zawarte odpowiednio w A_1 i A_2 takie, że $f(a_1) = f(a_2) = y$. Z injektywności f wynika, że $a_1 = a_2$, a zatem jest to element zbioru $A_1 \cap A_2$, co oznacza, ze y jest elementem obrazu zbioru $A_1 \cap A_2$.

Pozostało udowodnić wynikanie "$\Longleftarrow$". Dowód przeprowadzimy metodą "nie wprost".
Przypuśćmy, że $\forall A_1, A_2 \subset X \quad f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ dla pewnej funkcji f nie będącej injekcją. Istnieje wtedy przynajmniej jedna para a_1, a_2 taka, że $f(a_1) = f(a_2)$ oraz $a_1 \neq a_2$. Rozważmy zbiory $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_2\}$. Wówczas $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ oraz $f(A_1 \cap A_1) = \emptyset$, ale z drugiej strony $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1) \neq \emptyset$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność. ♣

Zadanie 1.31. (Arkadiusz Kobus) Niech $f : X \to Y, A_i \subset X, B_j \subset Y$. Wykazać następujące równości i zawierania oraz podać przykłady dla których zawieranie jest właściwe:

(a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

(b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

(c) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

(d) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

(e) $A_i \subset f^{-1}(f(A_i))$

(f) $f(f^{-1}(B_j)) = f(X) \cap B_j$

Rozwiązanie.

(a) Jeżeli $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, to znaczy, że istnieje $k \in I$ oraz $x \in A_k$, takie że $f(x) = y$, stąd też $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Dokładnie ten sam argument działa w drugą stronę.

(b) Jeżeli $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, to znaczy, że dla każdego $k \in I$ istnieje $x_k \in A_k$, takie że $f(x_k) = y$, stąd też $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Zawieranie jest właściwe na przykład gdy $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 0 \in \mathbb{R}$, a $A_k = \{k\}$ dla $k \in I = \mathbb{R}$. Wówczas $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = f(\varnothing) = \varnothing \subsetneq \{0\} = \bigcap_{i\in I}\{0\} = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

(c) Jeżeli $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$, to znaczy, że istnieje $k \in J$ oraz $y \in B_k$, takie że $f(x) = y$, stąd też $x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$. Dokładnie ten sam argument działa w drugą stronę.

(d) Jeżeli $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)$, to znaczy, że istnieje $y \in Y$, takie że dla każdego $k \in J$ zachodzi $f(x) = y \in B_k$, stąd też $x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$. Jeżeli $x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, to znaczy, że dla każdego $k \in J$ istnieje $y_k \in B_k$, takie że $f(x) = y_k$, ale wówczas otrzymujemy, że dla każdych $m, n \in J$ zachodzi $y_m = f(x) = y_n$, więc również $f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j$.

(e) Jeżeli $x \in A_i$, to oznacza, że $f(x) \in f(A_i)$, ale dzięki temu również $x \in f^{-1}(f(A_i))$. Zawieranie jest właściwe na przykład gdy $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 0 \in \mathbb{R}$. Wówczas $\{0\} \subsetneq f^{-1}(f(\{0\})) = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$.

(f) Jeżeli $y \in f(f^{-1}(B_j))$ to oznacza, że istnieje $x \in f^{-1}(B_j)$, takie że $f(x) = y$, stąd też wiemy, że $y \in f(X)$, ale również $x \in f^{-1}(B_j) \implies f(x) \in B_j$, więc również $y \in B_j$. Jeżeli zaś $y \in f(X) \cap B_j$, to znaczy, że istnieje $x \in X$ taki, że $f(x) = y \in B_j$, więc również $x \in f^{-1}(B_j)$, co oznacza, że $f(x) = y \in f(f^{-1}(B_j))$.

♣

2 Algebra zbiorów

Zadanie 2.1. (Arkadiusz Kobus) Wyrazić poprzez operacje teoriomnogościowe $(\cup, \cap, \setminus, ')$ na zbiorach A, B, C następujące zbiory:

(a) $\{x \in X \mid x \in A \implies x \in B\}$

(b) $\{x \in X \mid x \in A \iff x \in B\}$

(c) $\{x \in X \mid x \in A \text{ albo } x \in B\}$

(d) $\{x \in X \mid x \in A \implies (x \in B \iff x \in C)\}$

Rozwiązanie.

(a) Rozważmy implikację $p \implies q$. Jeżeli znamy prawo zaprzeczenia implikacji to wiemy, że zdanie $\neg(p \implies q)$ jest równoważne $p \wedge \neg q$. Zaprzeczając obu zdaniom dostaniemy, że $[\neg\neg(p \implies q)] \iff [\neg(p \wedge \neg q)]$. Lewą stronę uprościmy do $p \implies q$ stosując prawo podwójnej negacji ($\neg\neg\alpha \iff \alpha$). Prawą stronę uprościmy do postaci $\neg p \vee \neg\neg q$ na mocy prawa De Morgana, następnie zaś zastosujemy prawo podwójnej negacji aby otrzymać $\neg p \vee q$. Ostatecznie dostajemy równoważność $[p \implies q] \iff [\neg p \vee q]$. Otrzymana równoważność nazywa się prawem eliminacji implikacji. Rezultat możemy zweryfikować patrząc na tabelkę wartości logicznych:

p	q	$p \implies q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Gdy wyraziliśmy implikację za pomocy operacji $\vee, \wedge, \neg$ to możemy łatwo przetłumaczyć warunek wyróżniający zbiór za pomocą operacji teoriomnogościowych, mianowicie $[x \in A \implies x \in B] \iff [x \notin A \vee x \in B]$, więc $\{x \in X \mid x \in A \implies x \in B\} = \{x \in X \mid x \notin A \vee x \in B\} = \{x \in X \mid x \notin A\} \cup \{x \in B\} = A' \cup B$.

(b) Równoważność $p \iff q$ jest niczym innym co obustronna implikacja $(p \implies q) \wedge (p \Longleftarrow q)$. Oznacza to, że $\{x \in X \mid x \in A \iff x \in B\} = \{x \in X \mid x \in A \implies x \in B\} \cap \{x \in X \mid x \in A \Longleftarrow x \in B\}$. Oba te zbiory już wiemy jak zapisać na mocy poprzedniego podpunktu, więc $\{x \in X \mid x \in A \iff x \in B\} = (A' \cup B) \cap (A \cup B')$.

(c) Spójnik „albo” oznacza alternatywę rozłączną i definiujemy w następujący sposób:

p	q	p albo q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Należy rozróżniać spójnik „albo” (alternatywa rozłączna) oraz spójnik „lub” (alternatywa). Patrząc na tabelkę warto zwrócić uwagę, że zdanie (p albo q) oznacza to samo co $\neg(p \iff q)$. Odpowiadający spójnik teoriomnogościowy to różnica symetryczna oznaczana symbolem $\div$ (spotyka się też oznaczenie symbolem $\triangle$).
Z definicji więc $\{x \in X \mid x \in A \text{ albo } x \in B\} = A \div B$, co można też zapisać przy pomocy poprzedniego podpunktu jako $[(A' \cup B) \cap (A \cup B')]' = (A' \cup B)' \cup (A \cup B')' = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

(d)

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid x \in A \implies (x \in B \iff x \in C)\} &= \{x \in X \mid x \notin A \vee (x \in B \iff x \in C)\} = \\ &= A' \cup \{x \in X \mid x \in B \iff x \in C\} = A' \cup [(B' \cup C) \cap (B \cup C')] \end{aligned}$$

Najprostszymi postaciami odpowiedzi jest jedna z poniższych postaci:

Sumacyjna postać normalna: $(p_1 \cap p_2 \cap \dots \cap p_k) \cup (q_1 \cap q_2 \cap \dots \cap q_m) \cup \dots \cup (r_1 \cap r_2 \cap \dots \cap r_n)$

Iloczynowa postać normalna: $(p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_k) \cap (q_1 \cup q_2 \cup \dots \cup q_m) \cap \dots \cap (r_1 \cup r_2 \cup \dots \cup r_n)$

gdzie zbiory $p_i, q_j, r_l \in \{A, B, C, A', B', C'\}$. Każdą kombinację teoriomnogościową zbiorów można zapisać w obu tych postaciach, a są one ważne ponieważ wiele twierdzeń z zakresu podstaw matematyki przybiera

wyjątkowo prostą postać, jeżeli wykorzystywane zbiory będziemy zapisywać w takiej postaci. Żeby zapisać odpowiedź w sumacyjnej postaci normalnej wykorzystamy rozdzielność sumy i iloczynu względem siebie nawzajem dla zbioru $(B' \cup C) \cap (B \cup C')$ rozdzielając najpierw drugą, a potem pierwszą sumę:
$(B' \cup C) \cap (B \cup C') = [(B' \cup C) \cap B] \cup [(B' \cup C) \cap C'] = (B' \cap B) \cup (C \cap B) \cup (B' \cap C') \cup (C \cap C') = (B \cap C) \cup (B' \cap C')$
Odpowiedź w sumacyjnej postaci normalnej to $A' \cup (B \cap C) \cup (B' \cap C')$.

♣

Zadanie 2.2. (Patryk Michalski) Wykazać tożsamości:

(a) $A \cup (B \setminus C) = [(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C)$,

(b) $A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] = (A \setminus B) \cup [(A \cap C) \setminus D]$,

(c) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup A_n$,

(d) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = [A_1 \setminus (A_2 \cup \ldots \cup A_n)] \cup \ldots \cup [A_{n-1} \setminus A_n] \cup A_n$,

(e) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$.

Rozwiązanie. We wszystkich poniższych podpunktach P oznacza wyrażenie po prawej stronie znaku równości, a L — wyrażenie po lewej stronie znaku równości.

(a) Zauważmy, że zachodzi:

$$P = [(A \cup B) \cap C'] \cup (A \cap C) = [(A \cap C') \cup (B \cap C')] \cup (A \cap C) = [(A \cap C') \cup (A \cap C)] \cup (B \cap C') = \\ = A \cup (B \cap C') = A \cup (B \setminus C) = L.$$

(b) Zauważmy, że zachodzi:

$$L = A \cap [B \cap (C \cap D')']' = A \cap [B' \cup (C \cap D')] = (A \cap B') \cup (A \cap C \cap D') = (A \setminus B) \cup [(A \cap C) \setminus D] = P.$$

(c) Zawieranie $P \subset L$ jest oczywiste. Jeżeli $x \in L$, to istnieje $k := \max\{i \in \overline{1, n} \,|\, x \in A_i\}$. Wówczas jeśli $k \neq n$, to $x \in A_k \setminus A_{k+1}$, czyli zawsze zachodzi $x \in P$. Stąd $L \subset P$, a więc $L = P$.

(d) Dowód przebiega analogicznie jak w podpunkcie (c).

(e) Zawieranie $P \subset L$ jest oczywiste. Jeżeli $x \in L$, to zachodzi jedna z możliwości:

1° Gdy $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$, to jasne jest, że $x \in P$.

2° Gdy dla $I := \{i \in \overline{1, n} \,|\, x \in A_i\}$ mamy $\varnothing \subsetneq I \subsetneq \overline{1, n}$, to zachodzi co najmniej jeden z trzech następujących przypadków:

- $n \notin I$; wtedy $x \in A_k \setminus A_{k+1}$, gdzie $k := \max I$,
- $n \in I$, $1 \notin I$, wtedy $x \in A_n \setminus A_1$,
- $1 \in I$, wtedy $x \in A_k \setminus A_{k+1}$, gdzie $k := \max\{j \,|\, \overline{1, j} \subset I\}$.

We wszystkich tych przypadkach zachodzi $x \in P$.

Mamy więc $x \in P$. Stąd $L \subset P$, czyli $L = P$.

♣

Zadanie 2.3. (Patryk Michalski) Niech $k, l, n \in \mathbb{N}$ będą liczbami takimi, że $n + 1 = k + l$, a $A_1, \ldots, A_n$ — danymi zbiorami. Wykazać, że $L = P$, jeśli:

$$L := (\text{suma wszystkich przecięć } k \text{ zbiorów spośród } A_1, \ldots, A_n) = \bigcup_{i_1 < \ldots < i_k} (A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$

$$P := (\text{przecięcie wszystkich sum } l \text{ zbiorów spośród } A_1, \ldots, A_n) = \bigcap_{j_1 < \ldots < j_l} (A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_l}).$$

Rozwiązanie. Niech X oznacza przestrzeń zawierającą wszystkie $A_1, \dots, A_n$, np. $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Określmy funkcję $r : X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ wzorem:

$$r(x) := |I(x)|, \text{ gdzie } I(x) := \{i \in \overline{1,n} \,|\, x \in A_i\}.$$

Wtedy z definicji $L = \{x \in X \,|\, r(x) \geqslant k\}$, $P = \{x \in X \,|\, n - r(x) < l\} = L$. ♣

Zadanie 2.4. (Arkadiusz Kobus) Wykazać, że:

(a) $\displaystyle\bigcup_{i\in I}(A_i \backslash B_i) \subset \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \backslash \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$

(b) Zawieranie z podpunktu (a) może być właściwe

(c) $\displaystyle\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subset \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$

(d) Zawieranie z podpunktu (c) może być właściwe

(e) Zawieranie z podpunktu (c) staje się równością jeżeli $I = \mathbb{N}$ oraz ciągi zbiorów A, B są wstępujące (mówimy, że ciąg zbiorów S jest wstępujący, jeżeli $\forall i \in \mathbb{N} : S_n \subset S_{n+1}$)

Rozwiązanie.

(a) Weźmy dowolny $x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \backslash B_i)$. Wiemy, że istnieje indeks $k \in I$, taki, że $x \in A_k$, ale $x \notin B_k$. Oznacza to, że $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, a także, że $x \notin \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$, więc wiemy, że $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \backslash \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$.

(b) Weźmy przykładowo $I = \{0, 1\}, A_0 = \varnothing, B_0 = \{0\}, A_1 = \{1\}, B_1 = \{0, 1\}$. Wówczas:

$$\bigcup_{i\in I}(A_i \backslash B_i) = (A_0 \backslash B_0) \cup (A_1 \backslash B_1) = (\varnothing \backslash \{0\}) \cup (\{1\} \backslash \{0, 1\}) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \backslash \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = (A_0 \cup A_1) \backslash (B_0 \cap B_1) = (\varnothing \cup \{1\}) \backslash (\{0\} \cap \{0, 1\}) = \{1\} \backslash \{0\} = \{1\}$$

Jako dodatkowe ćwiczenie spróbuj znaleźć inny przykład demonstrujący zawieranie właściwe (istnieje przykład w którym wszystkie zbiory mają co najwyżej 1 element).

(c) Weźmy dowolny $x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$. Wiemy, że istnieje indeks $k \in I$, taki, że $x \in A_k$ oraz $x \in B_k$. Oznacza to, że $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, a także, że $x \in \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$, więc wiemy, że $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$.

(d) Weźmy przykładowo $I = \{0, 1\}, A_0 = \varnothing, B_0 = \{0\}, A_1 = \{0\}, B_1 = \varnothing$. Wówczas:

$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) = (A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1) = (\varnothing \cap \{0\}) \cup (\{0\} \cap \varnothing) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = (A_0 \cup A_1) \cap (B_0 \cup B_1) = (\varnothing \cup \{0\}) \cap (\{0\} \cup \varnothing) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$$

(e) Weźmy dowolny $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$. Wiemy z tego, że $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ oraz $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Niech $i_A \in \mathbb{N}$ będzie takim indeksem, że $x \in A_{i_A}$, a $i_B \in \mathbb{N}$ będzie takim indeksem, że $x \in B_{i_B}$. Oznaczmy $i_0 = \max\{i_A, i_B\}$. Z tego, że A i B są wstępujące wiemy, że $x \in A_{i_0}$ oraz że $x \in B_{i_0}$, czyli także $x \in A_{i_0} \cap B_{i_0}$ z czego wynika, że $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$.

♣

Zadanie 2.5. (Patryk Michalski) Uprościć warunki:

(a) $(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) = B$,

(b) $(A \setminus C) \cup B = A \cup B$,

(c) $[(A \cap B) \cup C] \setminus A = (A \cap B) \setminus C$.

Rozwiązanie. (a) Odp.: $A_1 \cap A_2 \subset B$.
Wystarczy zauważyć, że $(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) = (A_1 \cap A_2) \cup B$.

(b) Odp.: $A \cap C \subset B$.
Niech $A_1 := A \cap C$ oraz $A_2 := A \setminus C$. Mamy wówczas $A = A_1 \cup A_2$. Chcemy, by zachodziło $A_2 \cup B = A_1 \cup A_2 \cup B$. Stąd $A_1 \subset A_2 \cup B$, co wobec rozłączności A_1 i A_2 oznacza, że $A_1 \subset B$.

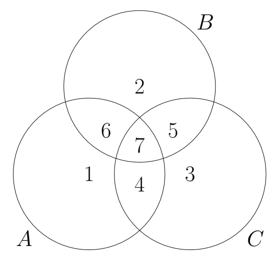
(c) Odp.: $A \cap B \subset C \subset A$.
Niech $D := A \cap B$. Chcemy, by zachodziło $(D \cup C) \setminus A = D \setminus C$. Stąd $(D \setminus A) \cup (C \setminus A) = D \setminus C$, czyli $C \setminus A = D \setminus C$, bo $D \setminus A = \varnothing$ z definicji zbioru D. Wiemy jednak, że $C \setminus A$ i $D \setminus C$ są zawsze rozłączne, dostajemy więc $C \setminus A = \varnothing$ oraz $D \setminus C = \varnothing$. Wobec tego $C \subset A$ oraz $D \subset C$.

♣

Zadanie 2.6. (Patryk Michalski) Wykazać, że $A \div B \subset (A \div C) \cup (C \div B)$, oraz że zachodzi równoważność:

$$(A \div C) \cap (C \div B) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B \subset C \subset A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad A \div B = (A \div C) \cup (C \div B).$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy oznaczenia odpowiednich zbiorów jak na poniższym rysunku:



Mamy wówczas $L := A \div B = 1 \cup 2 \cup 4 \cup 5$, a także $A \div C = 1 \cup 3 \cup 5 \cup 6$, $B \div C = 2 \cup 3 \cup 4 \cup 6$, czyli $P := (A \div C) \cup (C \div B) = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$. Zatem $P = L \cup R$, gdzie $R := 3 \cup 6 = (A \div C) \cap (C \div B)$. Zbiory L i R są rozłączne, otrzymujemy więc tezę. ♣

Uwaga. Z powyższego zadania wynika, że jeśli $|X| < \infty$, to wzór $d(A, B) := |A \div B|$ określa metrykę w zbiorze 2^X. Ponadto dla tej metryki „odcinek" zdefiniowany jako:

$$[A, B] := \{C \mid d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)\}$$

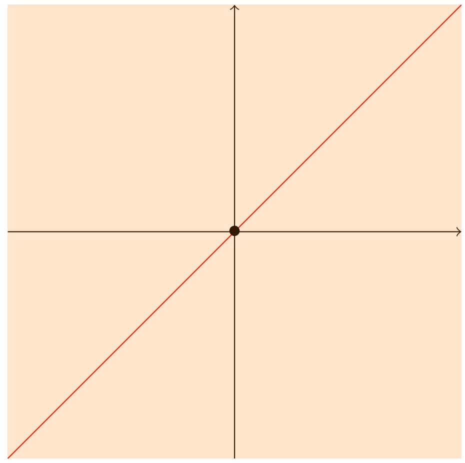
ma postać $\{C \in 2^X \mid A \cap B \subset C \subset A \cup B\}$.

Zadanie 2.7. (Aleksandra Oszmian) Opisać i naszkicować na płaszczyźnie zbiór

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant k(x - y)\}.$$

Rozwiązanie. Niech $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$, tzn. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists k \in \mathbb{Z} \quad x^2 + y^2 \leqslant k(x - y)\}$.
Rozważmy warunek $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x^2 + y^2 \leqslant k(x - y)$. Gdy $x = y$, to prawa strona zeruje się i jedynym punktem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniającym warunek $x^2 + y^2 \leqslant 0$ jest $(0, 0)$. Gdy $x \neq y$, może zachodzić $x > y$ lub $x < y$. W przypadku $x > y$, aby rozważana nierówność była niesprzeczna, musi być $k > 0$. Natomiast w drugim przypadku, gdy $x < y$, musi być $k < 0$.

Niech $x > y$ i $k > 0$ oraz ustalone (x, y). Nierówność $x^2 + y^2 \leqslant k(x - y)$ zapisujemy jako $\frac{x^2+y^2}{x-y} \leqslant k$. Na mocy aksjomatu Archimedesa takie k istnieje.
Gdy $y > x$ i $k < 0$, rozważaną nierówność można zapisać $\frac{x+y^2}{y-x} \leqslant -k$, gdzie $-k > 0$. Podobnie, na mocy aksjomatu Archimedesa takie k istnieje.
Ostatecznie $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = y,\ x \neq 0\}$.



♣

Zadanie 2.8. (Aleksandra Oszmian) W pewnej bitwie co najmniej 80% walczących straciło rękę, co najmniej 85% straciło nogę, co najmniej 70% straciło oko, a co najmniej 75% straciło ucho. Jaki jest minimalny procent uczestników tej bitwy, którzy odnieśli wszystkie obrażenia?

Rozwiązanie. Definujemy zbiory następująco:

X - zbiór wszystkich osób walczących w bitwie

A_1 - zbiór osób, które straciły nogę
A_1' - zbiór osób, które nie straciły nogi
$|A_1| \geqslant 0.8|X|$, $|A_1'| \leqslant 0.15|X|$

A_2 - zbiór osób, które straciły rękę
A_2' - zbiór osób, które nie straciły ręki
$|A_2| \geqslant 0.8|X|$, $|A_2'| \leqslant 0.2|X|$

A_3 - zbiór osób, które straciły oko
A_3' - zbiór osób, które nie straciły oka
$|A_3| \geqslant 0.7|X|$, $|A_3'| \leqslant 0.3|X|$

A_4 - zbiór osób, które straciły ucho
A_4' - zbiór osób, które nie straciły ucha
$|A_4| \geqslant 0.75|X|$, $|A_4'| \leqslant 0.25|X|$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ - zbiór osób, które straciły wszystko
$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)' = A_1' \cup A_2' \cup A_3' \cup A_4'$ - zbiór osób, które nie straciły przynajmniej jednej z wymienionych części ciała

Zachodzi $|(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)'| = |A_1' \cup A_2' \cup A_3' \cup A_4'| \leqslant |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = (0.3 + 0.2 + 0.25 + +0.15)|X| - 0.9|X|$.
$|(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)| \geqslant (1 - 0.9)|X| = 0.1|X|$
Zatem nie mniej niż 10% uczestników bitwy odniosło wszystkie obrażenia. ♣

Zadanie 2.9. (Krystian Gładych) Dla danego ciągu zbiorów $A_1, A_2, ...$ definiujemy

$$\liminf A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geqslant n} A_k, \limsup A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant n} A_k$$

Wykazać, że zawsze $\bigcap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_n A_n$. Przekonać się o tym dla

$$A_n := \left[\frac{(-1)^n n}{n+1}, \frac{4n-15}{2n-7}\right].$$

Rozwiązanie. Jak wynika z definicji,

$$\liminf A_n = \{x \in X |\ \text{x należy do prawie wszystkich } A_n\}$$
$$\limsup A_n = \{x \in X |\ \text{x należy do nieskończenie wielu } A_n\}$$

Stąd teza. Dla przykładu mamy

$$A_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{11}{5}\right], A_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right],$$
$$A_3 = \left[-\frac{3}{4}, 3\right], A_4 = \left[\frac{4}{5}, 1\right], A_5 = \left[-\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right].$$

Ciąg $(\frac{4n-15}{2n-7})$ rośnie dla $1 \leqslant n \leqslant 3$ i dla $n \geqslant 4$, dąży do 2, a jego największy wyraz to $\frac{4\cdot 3-15}{2\cdot 3-7} = 3$. Ciąg $(\frac{(-1)^n n}{n+1})$ dąży do -1 dla n nieparzystych i do 1 dla n parzystych, czyli

$$\bigcap_n A_n = \{1\}, \liminf A_n = [1,2[, \limsup A_n =]-1,2[, \bigcup_n A_n =]-1,3].$$

♣

Zadanie 2.10. (Krystian Gładych)

(a) Wyznaczyć zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant n(x_1 - x_2)\}$.

(b) Wyznaczyć zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 - 3nx_1 + 4nx_2 \leqslant 0\}$.

(c) $\bigcup_{n=1} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leqslant nx_1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ lub } x_2 \leqslant x_1\}$.

(d) Wyznaczyć zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, gdzie $K_n := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid {x_1}^2 + x_2^2 - 3nx_1 + 4nx_2 \leqslant 25\}$ (koła, których brzegi przechodzą przez punkty $(4,3)$ i $(-4,-3)$).

(e) Wykazać, ze zbiór $Z := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1x_2 \geqslant \frac{1}{8}\}$ jest zawarty w zbiorze $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1-n)^2 + (x_2-n)^2 \leqslant n^2\right\}$. Uwaga. Każde dwa kolejne okręgi przecinają się, przy czym punkty przecięcia leżą na krzywej $x_1x_2 = \frac{1}{8}$.

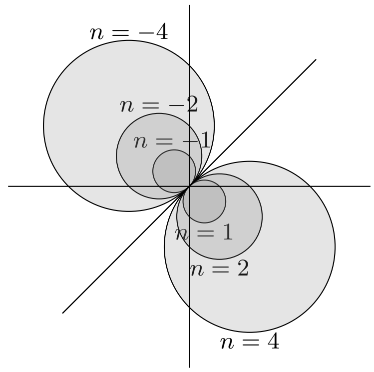
(f) Obliczyć $\bigcup_{t\in[0,1]} A_t$ oraz $\bigcap_{t\in[0,1]} A_t$, jeśli $A_t := [t, 2t+1] \times [-t, t+1]$.

Rozwiązanie. (a) Nierówność $x_1^2 + x_2^2 \leqslant n(x_1 - x_2)$ opisuje koła styczne do prostej $x_1 = x_2$. Gdy $x \neq (0,0)$, to $x_1^2 + x_2^2 > 0$, czyli warunek $\exists n \in \mathbb{Z} : x_1^2 + x_2^2 \leqslant n(x_1 - x_2)$ jest równoważny $x_1 \neq x_2$. To oznacza, że $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant n(x_1 - x_2)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq x_2 \text{ lub } x_1 = x_2 = 0\}$. Poniżej przedstawiono kilka przykładowych zbiorów (rysunek nie stanowi dowodu).

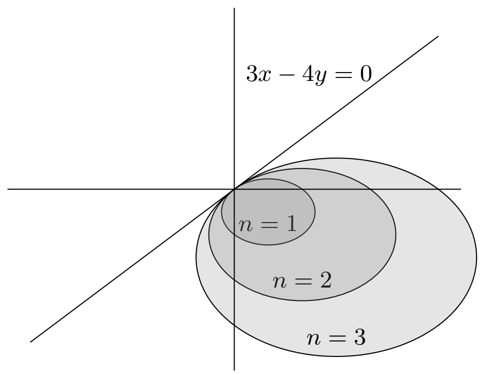
(b) Dla $x \neq (0,0)$ warunek $\exists n \in \mathbb{N} : (3x_1 - 4x_2)\, n \geqslant x_1^2 + 2x_2^2$ jest równoważny $3x_1 - 4x_2 > 0$ (ponieważ $x_2^2 + 2x_2^2$ to liczba dodatnia), czyli $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 - 3nx_1 + 4nx_2 \leqslant 0\} = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - 4x_2 > 0\}$.

(d) Z podpunktu (c) mamy

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 > 0 \text{ lub} \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 \leqslant 25, \text{ tzn. } \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x_2+2)^2 \leqslant \frac{125}{4} \end{cases}$$



Rysunek 1: Rysunek do podpunktu (a).



Rysunek 2: Rysunek do podpunktu (b).

(e) Wyróżnikiem trójmianu $n^2-2(x_1+x_2)n+\left(x_1^2+x_2^2\right)$ jest $\Delta = 8x_1x_2$. Zatem $\Delta \geqslant 1$ dla $x\in Z$, czyli (różnica pierwiastków wielomianu) $=\sqrt{\Delta}\geqslant 1$. Pierwiastki wielomianu są większe od 0, co wynika ze wzorów Viete'a, ponieważ $x_1+x_2>0$ oraz $x_1^2+x_2^2>0$ dla $x\in Z$. Stąd $\exists n\in\mathbb{N} : n^2-2(x_1+x_2)n+\left(x_1^2+x_2^2\right)\leqslant 0$ (odległość między pierwiastkami jest $\geqslant 1$, czyli jest między nimi liczba naturalna), co oznacza, że $x\in\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid (x_1-n)^2+(x_2-n)^2\leqslant n^2\right\}$. Tak więc $x\in Z \implies x\in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid (x_1-n)^2+(x_2-n)^2\leqslant n^2\right\}$.

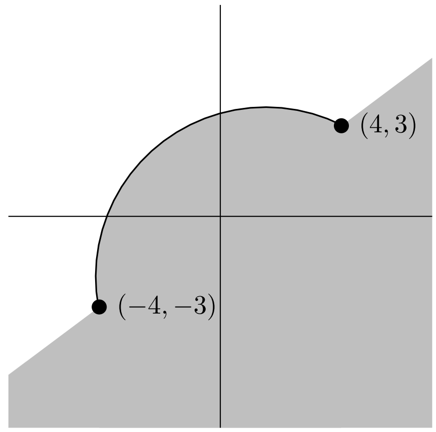
(f)

$$x\in\bigcup_{t\in[0,1]}A_t \Leftrightarrow \exists t\in[0,1] : \left(\begin{array}{c} t\leqslant x_1\leqslant 2t+1, -t\leqslant x_2\leqslant t+1, \text{ czyli} \\ \max\left\{\frac{x_1-1}{2}, -x_2, x_2-1\right\}\leqslant t\leqslant x_1\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} : \max\left\{0,\frac{x_1-1}{2},-x_2,x_2-1\right\}\leqslant t\leqslant \min\{1,x_1\}$$

$$\Leftrightarrow \left(\max\left\{0,\frac{x_1-1}{2},-x_2,x_2-1\right\}\leqslant \min\{1,x_1\}\right)\Leftrightarrow\left(0\leqslant 1, 0\leqslant x_1, \frac{x_1-1}{2}\leqslant 1, \frac{x_1-1}{2}\leqslant x_1, \text{ itd.}\right)$$

$$\Longleftrightarrow 0\leqslant x_1\leqslant 3, -1\leqslant x_2\leqslant 2, x_1+x_2\geqslant 0, x_2\leqslant 1+x_1.$$



Rysunek 3: Rysunek do podpunktu (d).

Zatem $\bigcup_{t\in[0,1]} A_t = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 3, -1 \leqslant x_2 \leqslant 2, x_1 + x_2 \geqslant 0, x_2 \leqslant 1 + x_1\right\}$. Podobnie,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{t\in[0,1]} A_t &\Leftrightarrow \forall t \in [0,1] : \max\left\{\frac{x_1-1}{2}, -x_2, x_2-1\right\} \leqslant t \leqslant x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \max\left\{\frac{x_1-1}{2}, -x_2, x_2-1\right\} \leqslant 0, \quad 1 \leqslant x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 \end{aligned}$$

Zatem $\bigcap_{t\in[0,1]} A_t = \{1\} \times [0,1]$.

♣

Zadanie 2.11. (Krystian Gładych) Wykazać, że dla dowolnych rodzin zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzą wzory:

1. $\liminf_n (A_n \cap B_n) = \liminf_n A_n \cap \liminf_n B_n$
2. $\liminf_n (A_n \cup B_n) \supset \liminf_n A_n \cup \liminf_n B_n$
3. $\limsup_n (A_n \cap B_n) \subset \limsup_n A_n \cap \limsup_n B_n$
4. $\limsup_n (A_n \cup B_n) = \limsup_n A_n \cup \limsup_n B_n$
5. $(\liminf_n A_n)' = \limsup_n A_n'$
6. $(\limsup_n A_n)' = \liminf_n A_n'$

Rozwiązanie. Dowód (4): Mamy $x \in \limsup_n (A_n \cup B_n) \iff \exists (n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ rosnący : $x \in A_{n_i} \cup B_{n_i}$ i wtedy $\mathbb{N} = K \cup L$, gdzie $K = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in A_{n_i}\}$ oraz $L = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in B_{n_i}\}$. Stąd wynika, że co najmniej jeden ze zbiorów K i L jest zbiorem nieskończonym, i jeżeli na przykład $\{i_r \mid r \in \mathbb{N}\} \subset K$, to $\forall r \in \mathbb{N} : x \in A_{n_{i_r}}$, tj., $x \in \limsup_n A_n$.

Dowód (5): Mamy ($x \in \liminf_n A_n \Leftrightarrow x \in A_n$ dla wszystkich poza skończenie wieloma wartościami n), czyli

$$\begin{gathered} x \in (\liminf_n A_n)' \Leftrightarrow x \notin A_n \text{ dla nieskończenie wielu n} \\ \Leftrightarrow x \in A_n' \text{ dla nieskończenie wielu n} \Leftrightarrow x \in \limsup_n A_n' \end{gathered}$$

♣

Zadanie 2.12. (Krystian Gładych) Jeżeli $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 9$ (lub $= 25$) oraz $|A_i \cap A_j| \leqslant 5$ (lub $\leqslant 14$) dla $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, to $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \geqslant 13$ (lub $\geqslant 36$).

Rozwiązanie. To wynika stąd, że

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \geqslant 9 + 9 - 5 = 13$$

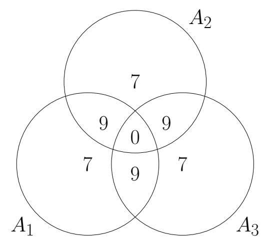
lub

$$|A_1 \cup A_2| \geqslant 25 + 25 - 14 = 36.$$

♣

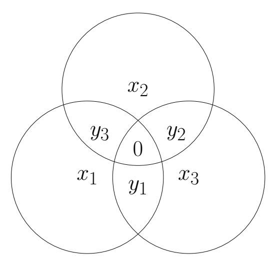
Zadanie 2.13. (Krystian Gładych) Wykazać, że jeżeli $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 25$ oraz $|A_i \cap A_j| \leqslant 9$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant 4$, to $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \geqslant 49$, przy czym tego ograniczenia nie da się poprawić.

Rozwiązanie. Ograniczenia nie da się poprawić: Niech $A_i = \{x_0\} \cup \bigcup_{j \leqslant 4, i \neq j} S_{ij}$, gdzie dla $1 \leqslant i, j \leqslant 4$: $|S_{ij}| = 8, S_{ij} = S_{ji}$, oraz $(S_{ij})_{i<j}$ są parami rozłączne i nie zawierają x_0. Wtedy $|A_i| = 1 + 3 \cdot 8 = 25$, $|A_i \cup A_j| = |\{x_0\} \cup S_{ij}| = 9$ oraz $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 1 + 6 \cdot 8 = 49$.



Udowadniamy nierówność: Mamy $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup_4| \geqslant |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \geqslant |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \geqslant 3 \cdot 25 - 3 \cdot 9 = 75 - 27 = 48$. Gdyby zachodziła równość, to (1) $A_4 \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$ oraz $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \overset{(2)}{=} \sum_i |A_i| - \sum_{i<j\leqslant 3} |A_i \cap A_j| \overset{(3)}{=} 48$. Równość (2) daje $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$, a równość (3) daje $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 9$, więc mamy powyższy przypadek (Rysunek 1).

Niech $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ to liczby elementów "kawałków" (Rysunek 2). Oznaczamy $x = x_1 + x_2 + x_3, y = y_1 + y_2 + y_3$. Skoro $|A_4| = 25$, to $x + y = 25$, a $|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \leqslant 3 \cdot 9 = 27$ daje $x + 2y \leqslant 27$. Stąd $x = 2(x + y) - (x + 2y) \geqslant 50 - 27 = 23$, co daje sprzeczność z $x \leqslant 7 + 7 + 7 = 21$.



♣

Zadanie 2.14. (Uogólnienie 2.13) (Krystian Gładych) Niech $p \in \mathbb{Z}_+$. Wykazać, że jeżeli $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 3p+1, |A_i \cap A_j| \leqslant p+1$, to $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \geqslant 6p+1$, przy czym tego oszacowania nie można poprawić ($|S_{ij}| = p$).

Rozwiązanie. Jeżeli $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \leqslant 6p$, to wtedy $6p \overset{(1)}{\geqslant} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \overset{(2)}{\geqslant} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \overset{(3)}{\geqslant} \sum_i |A_i| - \sum_{i<j\leqslant 3} |A_i \cap A_j| \overset{(4)}{\geqslant} 3(3p+1) - 3(p+1) = 6p$, czyli mamy same równości. Zatem z (2) wynika, że $A_4 \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$, z (3) wynika, że $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ i ogólniej $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$, a z (4) wynika, że $|A_i \cap A_j| = p+1$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant 3$ i ogólniej dla $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Tak więc $A_4 = (B_1 \cap A_4) \cup (B_2 \cap A_4) \cup (B_3 \cap A_4)$, gdzie $B_1 = A_1 \setminus (A_2 \cup A_3), B_2 = A_2 \setminus (A_1 \cup A_3)$, oraz $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ (ponieważ przecięcia A_4 z $A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_3$, i $A_1 \cap A_3$ są puste). Ale $|B_i| = p-1$, gdyż na przykład $3p+1 = |A_1| = |B_1| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| = |B_1| + 2(p+1)$. Stąd $|A_4| \leqslant 3(p-1) < 3p+1$, sprzeczność. ♣

Zadanie 2.15. (Arkadiusz Kobus) Niech X będzie pewnym nieskończonym zbiorem rozłącznych kół leżących na płaszczyźnie. Wykazać, że X jest przeliczalne, czyli $|X| = |\mathbb{N}|$.

Rozwiązanie. Najpierw udowodnimy, że każde koło zawiera jakiś punkt o obu współrzędnych wymiernych. Każde koło zawiera w sobie jakiś kwadrat, przykładowo koło $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$ zawiera kwadrat $]a_1 - r/2, a_1 + r/2[\times]a_2 - r/2, a_2 + r/2[$. Liczby wymierne są gęstym podzbiorem liczb rzeczywistych, dzięki czemu możemy wybrać wymierne liczby $p \in]a_1 - r/2, a_1 + r/2[$ oraz $q \in]a_2 - r/2, a_2 + r/2[$. Punkt $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$ jest wymiernym punktem wewnątrz koła, co kończy dowód. Teraz zauważmy, że rozłączne koła nie mają wspólnych punktów, więc powyższa procedura przypisywania dowolnemu kołu punkt z $\mathbb{Q}^2$ po zastosowaniu dla wszystkich kół z X da nam iniekcję z X do $\mathbb{Q}^2$. Istnienie takiej iniekcji pozwala nam stwierdzić, że $|X| \leqslant |\mathbb{Q}^2|$. Do tego wiemy, że X jest nieskończony, a najmniejszym zbiorem nieskończonym jest $\mathbb{N}$, więc zachodzi również $|\mathbb{N}| \leqslant |X|$. Zbiory $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Q}$ są równoliczne, tak samo jak $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Q}^2$ (do obu tych dowodów należy użyć argumentu podobnego do tego z zadania 1.29.c), więc możemy zapisać udowodnione nierówności w następującej postaci: $|\mathbb{N}| \leqslant |X| \leqslant |\mathbb{N}|$, dzięki czemu na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina-Schrödera otrzymujemy $|X| = |\mathbb{N}|$, co należało udowodnić. ♣

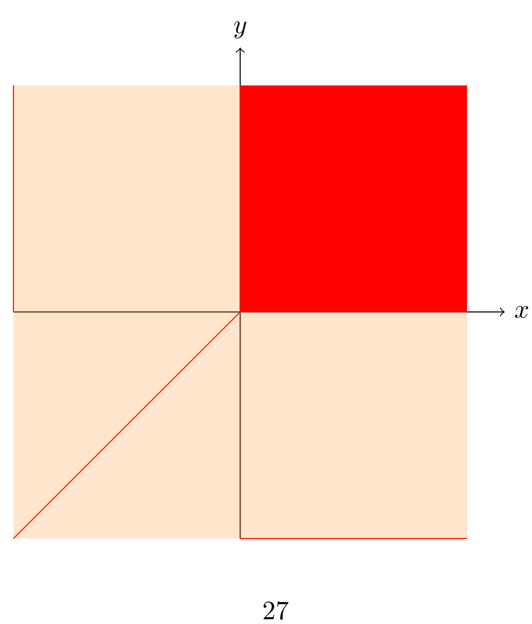
Uwaga. Słowo „zawiera” nie jest formalnym określeniem matematycznym, więc należy uważać jak jest używane. W poprzednim zadaniu używaliśmy słowa „zawiera” zarówno dla relacji bycia elementem ($x \in S$) jak i bycia podzbiorem ($A \subset S$). Zazwyczaj znaczenie wynika z kontekstu, ale gdy elementami zbioru są inne zbiory można łatwo źle zrozumieć co ktoś miał na myśli.

Uwaga. Łatwo znaleźć przykłady zbiorów, których można zmieścić nieprzeliczalnie wiele w płaszczyznę, tak aby się nie pokrywały (np. okręgi i proste). Klasyfikacja zbiorów na takie, które można zmieścić w nieprzeliczalnej ilości i takich dla których tego nie można zrobić jest nietrywialnym problemem, ale jeżeli zbiory mają niepuste wnętrze jest to niemożliwe (argument topologiczny wynikający z σ-zwartości przestrzeni euklidesowych) oraz jeśli mają niezerową powierzchnię jest to niemożliwe (argument teoriomiarowy wynikający z σ-skończoności przestrzeni euklidesowych). Spróbuj skonstruować przykład zbioru o zerowej powierzchni, którego tak samo jak kół nie można zmieścić w nieprzeliczalnej ilości na płaszczyźnie (konstrukcja nie wymaga żadnej wiedzy z zakresu topologii ani teorii miary).

3 Relacje równoważności

Zadanie 3.1. (Aleksandra Oszmian) $X = [-1, 1]$, $V = \{-1\} \times [0, 1]$. Znaleźć najmniejszą relację równoważności R w X taką, że $V \subset R$. Opisać klasy abstrakcji R.

Rozwiązanie. Skoro pary postaci $(-1, r)$ dla $r \in [0, 1]$ są w relacji, to korzystając z przechodniości stwierdzamy, że w relacji są wszystkie pary postaci (r, s) dla $r, s \in [0, 1]$. W R zawarty jest więc także zbiór $[0, 1] \times [0, 1]$. Symetria relacji oznacza też, że do R należeć muszą wszystkie pary postaci (r, r). Rysunek wygląda następująco:



Mamy dwa rodzaje klas abstrakcji:

$$[r] = \{r\} \text{ dla } r \in (-1, 0)$$
$$\text{oraz}$$
$$[0] = \{-1\} \cup [0, 1]$$

Zatem $R = \{(r, r) : r \in R\} \cup (\{-1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{-1\}) \cup ([0, 1] \times [0, 1])$. ♣

Zadanie 3.2. (Paweł Przybyła) Mając bijekcję $\varphi : X \to X$ określmy:

$$R := \{(x, y) \in X \times X \mid \exists k \geqslant 0 : y = \varphi^k(x)\},$$

gdzie: $\varphi^k := \varphi \circ ... \circ \varphi$. ($k$ razy). Pokazać, że R jest relacją równoważności.

Rozwiązanie. Niech $x \in X$, $x_0 := x$, $x_{n+1} := \varphi(x_n)$, tzn. $x_n = \varphi^n(x)$. Załóżmy, że X jest **skończony**; wtedy ciąg (x_n) musi być okresowy: $\exists l, m \in \mathbb{N} : x_l = x_{l+m}$ a wtedy $\varphi^l(x_0) = \varphi^l(x_m)$, czyli $x_0 = x_m$, skąd $x_{m+k} = \varphi^k(x_m) = \varphi^k(x_0) = x_k$ $\forall k \geqslant 0$. Stąd symetria relacji i zwrotność i przechodność są trywialne, więc R jest relacją równoważności. Klasy tej relacji naszywa się **φ-orbitami** albo cyklami permutacji φ.
Na przykład dla $X = \overline{1, 10}$, $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 7 & 10 & 6 & 8 & 9 \end{smallmatrix}\right)$ klasy są postaci $R_1 = \{1, 3\}$, $R_2 = \{2, 5, 4\}$, $R_3 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ ♣

Zadanie 3.3. (Paweł Przybyła) Niech $f : X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Pokazać, że relacja :

$$R := \{(x, y) \in X \times X | x = y \vee y = f(x)\}$$

jest równoważnością $\iff$ $f \circ f = id_X$, tzn. f jest inwolucją. Sprawdzić to dla $X = \mathbb{R}$, $f(x) := x + E(2x) - 2E(x) - \frac{1}{2}$; narysować zbiór R; wykazać, że

$$R = \{(x, y) | \varphi(x) = \varphi(y)\}$$

dla $\varphi(x) := 2x - E(x)$

Zadanie 3.4. (Paweł Przybyła) Niech $X \subset \mathbb{Z}$ będzie dowolnym, niepustym podzbiorem określonym relacją w X:

$$x \sim y \iff \overline{x, y} \subset X$$

gdzie $\overline{x, y} = \overline{y, x}$ (a więc przykładowo $\overline{3, 1} = \{1, 2, 3\}$, na ogół wygodniejsza jest inna konwencja: $\overline{x, y} = \emptyset$ gdy $x, y \in \mathbb{Z}$ oraz $x > y$). Jest to relacja równoważności i jej klasy są oczywiście przedziałami w $\mathbb{Z}$. Wynika stąd:

Fakt: Każdy niepusty podzbiór $\mathbb{Z}$ jest sumą mnogościową pewnych rozłącznych przedziałów w $\mathbb{Z}$.
Analogicznie dostajemy, biorąc dla $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$:

$$x \sim y \iff [x, y] \subset X.$$

Fakt: Każdy niepusty podzbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest sumą mnogościową pewnej rodziny rozdzielonych przedziałów (otwartych, domkniętych lub otwarto-domkniętych). Przedziały I, $J \subset \mathbb{R}$ są rozdzielone, jeżeli:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : I < x_0 < J \vee J < x_0 < I$$

.

Zadanie 3.5. (Paweł Przybyła) Iloczyn mnogościowy $R = R' \cap R''$ dwóch relacji równoważności R' i R'' w zbiorze X też jest relacją równoważności. Przy tym:

$$[x]_R = [x]_{R'} \cap [x]_{R''}$$

Na przykład iloczyn mnogościowy relacji $x \equiv y \pmod p$ i $x \equiv y \pmod q$ jest relacją $x \equiv y \pmod n$, gdzie $n := NWW(p, q)$.

Zadanie 3.6. (Paweł Przybyła) Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją symetryczną i przechodnią. Wówczas $R \subset X^* \times X^*$, gdzie $X^* = \{x \in X | \exists y \in X : (x,y) \in R\}$, przy czym R jest relacją równoważności w X^*. Także *vice versa* tzn. ...

Zadanie 3.7. (Paweł Przybyła) Niech $d : X \times X \to \mathbb{R}$ będzie pseudometryką, tzn. spełnia warunki $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ $\forall x,y,z \in X$. Wtedy:

1. $R := \{(x,y) \mid d(x,y) = 0\}$ jest relacją równoważności w X,
2. działanie $\tilde{d}([x],[y])$ jest poprawne,
3. $\tilde{d}$ jest metryką w X/R

4 Przestrzenie metryczne

Zadanie 4.1. (Paweł Przybyła) Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} := \max_i |x_i - y_i|$, (przy oznaczeniach $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$) określa metrykę na $X = \mathbb{R}^n$ (**metryka $\mathbf{L}^\infty$** na $\mathbb{R}^n$). Dla $n = 2$ ($X = \mathbb{R}^2$, płaszczyzna) opisać kule $K(a;r) := \{x \in X | d(a,x) < r\}$ oraz odcinki $[a,b] := \{x \in X | d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)\}$ (d-odcinki) względem tej metryki.

Rozwiązanie. Nierówność trójkąta daje $\forall j \in \overline{1,n} : |x_j - y_j| = |\,(x_j - z_j) + (z_j - y_j)\,| \leqslant |x_j - z_j| + |z_j - y_j| \leqslant \max_i |x_i - z_i| + \max_i |z_i - y_i| = d(x,z) + d(z,y)$, a zatem także $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.
Dla n = 2 d-kule w $\mathbb{R}^2$ są kwadratami o bokach równoległych do osi współrzędnych o długości $2r$, czyli $K(a;r) = \{(x_1,x_2) \mid \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r,\ \text{tzn. } |x_1 - a_1| < r \wedge |x_2 - a_2| < r\} = (]a_1 - r, a_1 + r[) \times (]a_2 - r, a_2 + r[)$.
W $\mathbb{R}^2$ d-odcinki są prostokątami o bokach tworzących kąt 45° z osiami współrzędnych (końce takiego d-odcinka są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta).
Dowód: Niech np. $|a_1 - b_1| \geqslant |a_2 - b_2|$; wtedy dla $x \in X = \mathbb{R}^2$ mamy:
$d(a,b) = |a_1 - b_1| \leqslant |a_1 - x_1| + |x_1 - b_1| \leqslant d(a,x) + d(x,b)$ przy czym pierwsza nierówność przechodzi w równość wtedy i tylko wtedy gdy $x \in [a_1, b_1]$, zaś druga tylko wtedy gdy $|a_1 - x_1| \geqslant |a_2 - x_2| |x_1 - b_1| \geqslant |x_2 - b_2|$
Pierwszy z tych warunków opisuje pas ograniczony prostymi $x_1 = a_1$ i $x_1 = b_1$ co daje opis $[a,b]$. ♣

Spostrzeżenie: Może być $[a,b] = [a',b']$ mimo, ze $a \neq a'$, $b \neq b'$, zatem zbiór $[a,b]$ nie określa jednoznacznie $\{a,b\}$.

Zadanie 4.2. (Paweł Przybyła) To samo dla **metryki $\mathbf{L}^1$** na $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) := |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Rozwiązanie. Nierówność trójkąta: banalne spostrzeżenie (z $|x_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - x_i|$). Dla $n = 2$ d-kule są kwadratami o bokach tworzących kąt 45° z osiami współrzędnych i przekątnych o długości $2r$.
Z kolei d-odcinki w $\mathbb{R}^2$ są prostokątami o bokach równoległych do osi współrzędnych (końce d-odcinka są dwoma przeciwległymi wierzchołkami prostokąta). Istotnie, $x \in [a,b] \iff |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| = (|a_1 - x_1| + |x_1 - b_1|) + (|a_2 - x_2| + |x_2 - b_2|)$ Co jest równoważne:

$$\begin{cases} |a_1 - b_1| = |a_1 - x_1| + |x_1 - b_1|, \text{ tzn. } x_1 \in [a_1, b_1] \\ |a_2 - b_2| = |a_2 - x_2| + |x_2 - b_2|, \text{ tzn. } x_1 \in [a_2, b_2] \end{cases}$$

Czyli dla metryki L^1 mamy $[a,b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. ♣

Uwaga: W Zad 1. i Zad 2. stosowaliśmy konwencję $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} |\ |a - b| = |a - x| + |x - b|\}$ tzn $[a,b] = [b,a] =$ (przedział o końcach a i b) dla przedziałów liczbowych.

Zadanie 4.3. (Paweł Przybyła) Udowodnij, że dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X,d) przedział $[a,b]$ jest zbiorem domkniętym (względem topologii τ_d).

Rozwiązanie I. Pokażemy, że dopełnienie $U := X\backslash[a,b] = \{x \in X | d(a,b) < d(a,x) + d(x,b)\}$ jest zbiorem otwartym:
Niech $x \in U$, wtedy $r := \frac{1}{2}[d(a,x) + d(x,b) - d(a,b)] > 0$; otóż $K(x;r) \subset U$, gdyż:

$$y \in K(x;r) \ \Rightarrow \ d(x,y) < r \ \Rightarrow \ (d(a,y) + d(y,b) \geqslant (d(a,x) - d(x,y)) + (d(x,b) - d(x,y)) >$$

$$> d(a,x) + d(x,b) - 2r = d(a,b)) \ \Rightarrow \ y \in U$$

Zatem U wraz z każdym punktem $x \in U$ zawiera pewną kulę $K(x;r)$, więc jest otwarty.

♣

Rozwiązanie II. Pokażemy, że jeżeli $x_n \in [a,b]$ (tzn. $d(a,b) = d(a,x_n) + d(x_n,b)$) oraz ciąg (x_n) jest zbieżny w X tzn. $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ istnieje, to także $x \in [a,b]$:
Z ciągłości metryki: $d(a,x) = \lim_{n\to\infty} d(a,x_n)$, $d(b,x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,b)$, więc: $d(a,x)+d(x,b) = \lim_{n\to\infty}(d(a,x_n)+ d(x_n,b)) = \lim_{n\to\infty} d(a,b) = d(a,b)$, więc $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$.

♣

Zadanie 4.4. (Paweł Przybyła) Dwie metryki d, d' na X nazywamy **równoważnymi**, jeżeli: $\exists C_1, C_2 > 0$: $\forall x, y \in X$:

$$C_1 d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant C_2 d(x,y)$$

Jeżeli tak jest, to $\tau_d = \tau_{d'}$ (ale nie na odwrót!), gdyż dla kul K, K' względem obu metryk mamy: $K'(x;r) \supset K(x;\frac{r}{C_2})$, $K(x;r) \supset K'(x;C_1 r)$.
Wykazać, że dla $p \in \{1,2,\infty\}$ L^p-metryki na $\mathbb{R}^n$ są równoważne:

$$\begin{cases} d_p(x,y) := (\sum\limits_i (x_i - y_i)^p)^{\frac{1}{p}}, \text{ dla } 1 \leqslant p < \infty \\ d_\infty(x,y) := \max\limits_i |x_i - y_i| \end{cases}$$

Uwaga: To, że d_2 jest metryką („zwykła”, czyli **euklidesowa** metryka na $\mathbb{R}^n$), wynika z nierówności Schwarza. Dowód nierówności trójkąta dla d_p wymaga uogólnienia tej nierówności (nierówność Höldera).
Mamy też $\lim_{p\to\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$, co można zilustrować dla $n = 2$, rysując kule względem kolejnych metryk d_p.

Dowód równoważności L^p-metryk:. Pokażemy, że: $d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant \sqrt{n} d_2(x,y)$ oraz $\frac{1}{\sqrt{n}} d_2(x,y) \leqslant d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y)$, czyli biorąc ($a_i := |x_i - y_i| \geqslant 0$), że:

$$\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_i a_i \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \max_i\{a_1, ..., a_n\} \leqslant \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Kolejne nierówności pokazujemy przez:

1. wprost z definicji z podnoszenia obu stron do kwadratu (gdyż $a_i a_j \geqslant 0$)
2. ze Schwarza: $\sum a_i b_i \leqslant \left(\sum a_i^2\right)^2 \left(\sum b_i^2\right)^2$, biorąc $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$
3. oznaczając $a := \max\{a_1, ..., a_n\}$ mamy $a_i^2 \leqslant a^2$, więc $\sum a_i^2 \leqslant \sum a^2 = na^2$
4. niech $a = a_j = \max\{a_1, .., a_n\}$, wtedy $\sum a_i^2 = a_j^2 + \sum_{i\neq j} a_i^2 \geqslant a_j^2 = a^2$.

♣

Zadanie 4.5. (Paweł Przybyła) Niech $f : \mathbb{R}_+ = [0,\infty] \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Wykazać, że wzór:

$$d(x,y) := f(|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

określa **pseudometrykę** na $\mathbb{R}$ (tzn. $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$), wtedy i tylko wtedy gdy $f(0) = 0$ oraz zachodzi nierówność $|f(a) - f(b)| \leqslant f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$. Natomiast d jst metryką, jeżeli dodatkowo $f(a) > 0$ dla $a \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\} =]0,\infty[$.

Rozwiązanie. $f(0) = d(x,x) = 0$, $f(a+b) = d(0,a+b) \leqslant d(0,a) + d(a,a+b) = f(a) + f(b)$, $|f(a) - f(b)| = |d(0,a) - d(a,a+b)| \leqslant d(0,a+b) = f(a+b)$.
Dowód $\Leftarrow$ Dla $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi choć jedna z możliwości:

1. $z \in [x,y]$; wtedy $|x-y| = |x-z|+|z-y|$, więc $d(x,y) = f(|x-y|) \leqslant f(|x-z|)+f(|z-y|) = d(x,y)+d(y,z)$
2. $x \in [y,z]$; wtedy $|x-y|+|x-z| = |z-y|$, więc $f(|z-y|) \geqslant |f(|x-y|) - f(|x-z|)| \geqslant f(|x-z|) - f(|z-y|) - f(|x-z|)$, czyli $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$
3. $y \in [x,z]$; wtedy $|x-y| + |z-y| = |x-z|$, więc ...

♣

Zadanie 4.6. (Paweł Przybyła) Wykazać, że funkcje:

(a) $f(a) := \min\{1, a\}$,

(b) $f(a) := \frac{a}{1+a}$,

(c) $f(a) := \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$,

(d) $f(a) := \begin{cases} a, & \text{dla } 0 \leqslant a < 1 \\ \dfrac{a}{2a-1}, & \text{dla } 1 \geqslant a \end{cases}$

Spełniają wszystkie wymienione w Zad 5. własności (czyli definiują metryki na $\mathbb{R}$); natomiast $f(a) := |\sin a|$ nie spełnia tylko warunku dodatniości (czyli $d(x,y) := |\sin(x-y)|$ jest pseudometryką na $\mathbb{R}$).

Rozwiązanie. Dla rosnącej f nierówność $|f(a) - f(b)| \leqslant f(a+b)$ jest spełniona trywialnie, więc nie trzeba jej sprawdzać w przypadkach a), b), c).

(a) gdy $a < 1$ i $b < 1$, wtedy $f(a+b) = \min 1, a+b \leqslant a+b = f(a)+f(b)$. Gdy zaś na przykład $a \geqslant 1$, wtedy $f(a+b) = \min 1, a+b = 1 \leqslant 1 + min 1, b = f(a) + f(b)$

(b) $f(a+b) = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = f(a) + f(b)$

(c) $f(a+b) = \frac{a+b}{\sqrt{1+(a+b)^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+(a+b)^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+(a+b)^2}} \leqslant \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = f(a) + f(b)$

(d) W tym przykładzie f **nie jest niemalejąca!** Sprawdzenie łatwo przeprowadza się osobno dla każdego z następujących obszarów $A_1, ..., A_2 \in \mathbb{R}^2_+$ zadanych następująco:

$$A_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ |\ b \leqslant 1 - a\}$$

$$A_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ |\ b \geqslant 1 - a \wedge a \leqslant 1 \wedge b \leqslant 1\}$$
$$A_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ |\ a \geqslant 1 \wedge b \geqslant 1\}$$
$$A_4 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ |\ a \geqslant 1 \wedge b \leqslant 1\}$$
$$A_5 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_+ |\ a \leqslant 1 \wedge b \geqslant 1\}$$

(e) $f(a) = |\sin a|$ i oznaczmy $u = |\sin a|$, $v = |\sin b|$. Wtedy:

$$f(a+b) = |u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2}| \leqslant u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2} \leqslant u + v = f(a) + f(b)$$

Z drugiej strony łatwo sprawdzić, że $1 - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} \geqslant uv$, mnożąc obustronnie przez $2uv$ i dodając obustronnie $u^2 + v^2 - 2uv - 2u^2v^2$ dostajemy $|u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{q-u^2}|^2 \geqslant |u-v|^2$ mamy $f(a+b) \geqslant |u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{1-u^2}| \geqslant |u-v| = |f(a) - f(b)|$.

♣

Zadanie 4.7. (Paweł Przybyła) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokazać, że jeśli $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ spełnia warunki: (1) jest niemalejąca; (2) $f(a) = 0 \iff a = 0$; (3) $f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$, to $\tilde{d} := f \circ d$ (tzn. $\tilde{d}(x, y) := f(d(x, y))$, dla $x, y \in X$) też jest metryką.

Rozwiązanie. Pokażemy tylko nierówność trójkąta:

$$\tilde{d}(x, y) = f(d(x, y)) \leqslant f(d(x, z) + d(z, y)) \leqslant \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(z, y),$$

gdzie najpierw użyliśmy (1) potem (3). ♣

Zadanie 4.8. (Paweł Przybyła) Sprawdzić, że funkcja:

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y|, & \text{gdy } xy \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2 + xy + y^2}, & \text{gdy } xy < 0 \end{cases}$$

określa metrykę na $X = \mathbb{R}$. Znaleźć opis kul względem tej metryki.

Rozwiązanie. Dla dowodu nierówności trójkąta wystarczy pokazać, że $\forall x, y, z :$

$$\varphi_z(x) - \varphi_z(y) \leqslant |x - y| \leqslant \varphi_z(x) + \varphi_z(y)$$

, gdzie $\varphi_z(x) := \sqrt{x^2 + xz + z^2}$. Ustalmy z i piszmy φ zamiast φ_z; mamy więc $\varphi(x) = \sqrt{(x + \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{4}z^2} \geqslant |x + \frac{z}{2}|$, zatem $\varphi(x) + \varphi(y) \geqslant |x + \frac{z}{2}| + |y + \frac{z}{2}| \geqslant |x + y + z|$, skąd $\varphi(x) - \varphi(y) = \frac{(x+y+z)(x-y)}{\varphi(x)+\varphi(y)} \leqslant \frac{|x+y+z|}{\varphi(x)+\varphi(y)}|x - y| \leqslant |x - y|$, a także $|x - y| = |(x + \frac{z}{2} - (y + \frac{z}{2})| \leqslant |x + \frac{z}{2}| + |y + \frac{z}{2}| \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$
Kule w $(\mathbb{R}, d)$, dla $x > 0$:

$$K(x, r) := \begin{cases}]x - r, x + r[\,, & \text{gdy } \geqslant 0 \\ \left]-\dfrac{x}{2} - p, \dfrac{x}{2} + p\right[\cup]x - r, x + r[& \text{gdy } xy < 0 \\ \left]-\dfrac{x}{2} - p, x + r\right[, & \text{gdy } xy < 0 \end{cases}$$

gdzie $p := \sqrt{r^2 - \frac{3}{4}x^2}$. ♣

Zadanie 4.9. (Paweł Przybyła) Niech $X := K(0; 1) := \{x \in \mathbb{C} | |x| < 1\} \subset \mathbb{C}$; $d(x, y) := \min(|x - y|, 2 - |x| - |y|)$. Sprawdzić, że (X, d) jest przestrzenią metryczną **niezupełną**, natomiast biorąc $\tilde{X} := \{1\} \cup X$ i dookreślając d:

$$\tilde{d}(x, y) := \begin{cases} d(x, y), & x, y \in X \\ 1 - |x|, & y = 1 \end{cases}$$

otrzymujemy **uzupełnienie** przestrzeni X.

Uwaga: Mówimy, że **średnica** X wynosi 1, gdyż zawsze $d(x, y) \leqslant 1$

Uwaga: Interpretacja: X traktujemy jako jezioro w kształcie koła, załóżmy też, że prędkość z jaką pływamy jest znacznie mniejsza od prędkości z jaką możemy chodzić wzdłuż brzegu jeziora. Przebyć dowolną drogę od x do y możemy albo w linii prostej po jeziorze albo dopłynąć do brzegu wzdłuż promienia jeziora, pokonać w pomijalnie krótkim czasie odległość po obwodzie koła i przebyć odległość do celu znowu w linii prostej.

Rozwiązanie. Oznaczmy symbolami I oraz II następujące relacje w X:

$$(x, y) \in I \iff |x - y| \leqslant 2 - |x| - |y|, \qquad (x, y) \in II \iff (x, y) \notin I.$$

Wtedy:

$$(x, z) \in I, (z, y) \in I \Rightarrow d(x, y) \leqslant |x - y| \leqslant |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$
$$(x, z) \in I, (z, y) \in II \Rightarrow d(x, y) \leqslant 2 - |x| - |y| \leqslant 2 - (|z| - |x - z|) - |y| = d(x, z) + d(z, y)$$
$$(x, z) \in II, (z, y) \in II \Rightarrow d(x, y) \leqslant 2 - |x| - |y| \leqslant 2 - |x| - |y| + -2|z| = d(x, z) + d(z, y)$$

Rozbieżny ciąg Cauchy'ego w X: $x_n := 1 - \frac{1}{n}$ (albo na przykład $x_n = -1 + \frac{1}{n}$) (w obu przypadkach $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ w przestrzeni $\tilde{X}$!) ♣

Uwaga: Warto narysować kilka przykładów kół dla tej metryki!

Zadanie 4.10. (Paweł Przybyła) (Metryka „rzymska" w $X := \mathbb{R}^2$). Niech:

$$d(x,y) := \begin{cases} |x| + |y|, & x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \\ |x-y|, & x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \end{cases}$$

gdzie $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Sprawdzić, że jest to metryka. Narysować przykłady kul i odcinków. **Interpretacja: „wszystkie drogi prowadzą do Rzymu".**

Zadanie 4.11. (Paweł Przybyła) Dowieść, że suma oraz maksimum dwóch metryk (d_1, d_2 na zbiorze X) jest metryką. Podać przykład pokazujący, że minimum dwóch metryk może nie być metryką.

Rozwiązanie. Dla $X := \mathbb{R}_+$, $d'(x,y) := |x-y|$ oraz $d''(x,y) := |x^2 - y^2|$, dla $d(x,y) := \min(d'(x,y), d''(x,y))$ otrzymujemy: $d(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $d(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 1$, $d(0, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2} > \frac{1}{4} + 1$. Zatem nierówność trójkąta nie jest spełniona.

♣

Zadanie 4.12. (Paweł Przybyła) Sprawdzić, że d jest metryką na $\mathbb{R}^2$:

$$d(x,y) := \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| - |x_1 - y_1||x_2 - y_2|, \text{ gdy } |x_2 - y_2| \geqslant 1 \\ 1, \text{ gdy } |x_1 - y_1| \geqslant 1 \vee |x_2 - y_2| \geqslant 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że $d(x,y) = \frac{1}{2}|Q_x \div Q_y| = 1 - |Q_x \cap Q_y|$, gdzie $Q_x := P_{x_1} \times P_{x_2}$, $P_{x_1} := [x_1 - \frac{1}{2}, x_1 + \frac{1}{2}]$. Stąd latwo wynika nierówność trójkąta. ♣

Zadanie 4.13. (Aleksandra Oszmian) Niech $H = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. Wykazać, że wzór

$$d(z_1, z_2) = \min\{\|z_1 - z_2\|, Im(z_1 + z_2)\}$$

określa metrykę w H.
Sprawdzić, że ciąg $z_n = n + \frac{i}{n}$ spełnia warunek Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny w H.

Rozwiązanie. Sprawdzamy kolejno warunki określające metrykę:

1) $d(z_1, z_2) = 0 \iff \min\{\|z_1 - z_2\|, Im(z_1 + z_2)\} = 0$
Ponieważ dla wszystkich $z \in H$, $Im(z) > 0$, to $d(z_1, z_2) = 0$ oznacza, że $d(z_1, z_2) = \|z_1 = z_2\| = 0$, więc oczywiście $z_1 = z_2$.

2) Oba wyrazy $\|z_1 - z_2\|$ i $Im(z_1 + z_2)$ są symetryczne, zatem d jest symetryczna.

3) Nierówność trójkąta
$d(z_1, z_2) = \min\{\|z_1 - z_2\|, Im(z_1 + z_2)\}$ oznacza to, że $d(z_1, z_2) \leqslant \|z_1 - z_2\|$ i $d(z_1, z_2) \leqslant Im(z_1 + z_2)$.
Wiadomo, że dla dowolnego $w \in H$ zachodzi:

$$\|z_1 - z_2\| \leqslant \|z_1 - w\| + \|w + z_2\|$$

Podobnie:

$$Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2) \leqslant Im(z_1 + w) + Im(w + z_2)$$

Jeśli więc w jest takie, że $d(z_1, w) = \|z_1 - w\|$ i $d(z_2, w) = \|w - z_2\|$,
to $d(z_1, z_2) \leqslant \|z_1 - z_2\| \leqslant \|z_1 - w\| + \|w - z_2\| = d(z_1, w) + d(w, z_2)$.
Podobnie jeśli $d(z_1, w) = Im(z_1 + w)$ i $d(z_2, w) = Im(z_2 + w)$,
to $d(z_1, z_2) \leqslant Im(z_1 + z_2) \leqslant Im(z_2 + w) + Im(z_1 + w) = d(z_1, w) + d(z_2, 2)$.
Do rozpatrzenia pozostaje jedynie przypadek, gdy

$$d(z_1, w) = Im(z_1 + w),\ d(z_2, w) = \|z_2 - w\|.$$

$d(z_1, z_2) \leqslant Im(z_1 + z_2) = Im(z_1 + w - w + z_2) = Im(z_1 + w) + Im(z_2 - w) = Im(z_1 + w) + \|z_2 - w\| = d(z_1, w) + d(z_2, w)$.
Jeśli $d(z_1, w) = \|(z_1 - w)\|$ i $d(z_2, w) = Im(z_2 + w)$, to dowodzimy jak wyżej.

Sprawdzamy, czy $z_n = n + \frac{i}{n}$ spełnia warunek Cauchy'ego:

$$d(z_n, z_m) \leqslant Im(z_n + z_m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

Ustalamy $\epsilon > 0$ i wybieramy N takie, ze $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$, czyli $N > \frac{2}{\epsilon}$. Wówczas dla $k, m > N$ mamy $d(z_n, z_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. ♣

Zadanie 4.14. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą zbieżnymi ciągami w przestrzeni metrycznej (X, d). Załóżmy ponadto, że ich zbiory wyrazów są równe, tzn.

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Wykazać, że granice obu ciągów są równe lub A jest zbiorem skończonym.

Rozwiązanie. Jeśli ciąg (x_n) jest zbieżny w (X, d) i jego zbiór wyrazów jest skończony, to oznacza to, że jest od pewnego miejsca stały. Dwa ciągi zbiezne o tym samym skończonym zbiorze wyrazów rzeczywiście nie muszą być zbieżne do tej samej granicy, gdyż stała wartość może być którymkolwiek elementem zbioru wyrazów.

Rozpatrzmy więc dokładniej przypadek, gdy zbiór wrazów A jest nieskończony, tzn. w tym przypakdu przeliczalny. Założmy, że x_0, y_0 jsą granicami (x_n) i (y_n) odpowiednio oraz $x_0 \neq y_0$. Niech $\delta = d(x_0, y_0)$. Ponieważ $\lim x_n = x_0$, to prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) należą do $K(x_0, \delta)$. Zbiór $A \backslash K(x_0, \delta)$ jest więc skończony. Ponieważ $K(x_0, \delta) \cap K(y_0, \delta) = \emptyset$, zbiór $A \cap K(y_0, \delta)$ jest skończony - zawiera on prawie wszystkie wyrazy ciągu (y_n), tzn. zbiór wyrazów ciągu (y_n) jest skończony. Jest to sprzeczne z założeniem, że oba ciągi mają ten sam nieskończony zbiór wyrazów. ♣

Zadanie 4.15. (Aleksandra Oszmian) Niech A, B będą podzbiorami przestrzeni metrycznej (X, d). Wykazać, że jeśli A i B sa otwarte lub A i B są domknięte, to $A \backslash B$ i $B \backslash A$ są rozgraniczone.
<u>Definicja:</u> Zbiory S_1 i S_2 są rozgraniczone, jeśli $\overline{S_1} \cap S_2 = S_1 \cap \overline{S_2} = \emptyset$.

Rozwiązanie. Załóżmy najpierw, że A, B są otwarte i rozważmy przypadek $A \backslash B$ i $B \backslash A$ nierozgraniczone. Oznacza to, że

$$\overline{A \backslash B} \cap (B \backslash A) \neq \emptyset$$
lub
$$\overline{B \backslash A} \cap (A \backslash B) \neq \emptyset$$

Powyższe stwierdzenie jest symetryczne ze względu na zamianę A na B, więc można rozważyć tylko jedną z dwóch sytuacji. Niech więc istnieje $x \in X$ takie, że

$$x \in \overline{A \backslash B} \text{ i } x \in B \backslash A.$$

Pierwszy przypadek oznacza, że istnieje ciąg elementów $A \backslash B$ zbieżny do x, w szczególności dla dowolnego $\epsilon > 0$ w $K(x, \epsilon)$ znajdują się prawie wszystkie elementy tego ciągu. Podkreślamy, że elementy tego ciągu nie należą do B. Jednoczesnie B jest otwarty, więc w pewnej kuli $K(x, \delta)$ są tylko elementy B - otrzymalismy sprzeczność.

Teraz załóżmy, że A i B są domknięte i jednocześnie $A \backslash B$ i $B \backslash A$ nie są rozgraniczone, tzn.

$$\overline{A \backslash B} \cap (B \backslash A) \neq \emptyset$$
lub
$$\overline{B \backslash A} \cap (A \backslash B) \neq \emptyset$$

Znowu wystarczy rozważyć jeden przypadek.
Niech $x \in \overline{A \backslash B}$ i $x \in B \backslash A$. Wiadomo, że $\overline{A \backslash B} \subset \overline{A} = A$. Zatem $x \in A$. Nie może zachodzić więc jednocześnie $x \in B \backslash A$. ♣

5 Ciągi liczbowe

Zadanie 5.1. (Paweł Przybyła) Obliczyć granicę $g = \lim_{n\to\infty} x_n$, wyznaczyć $m \in \mathbb{N}$ takie, że $|x_n - g| < \frac{1}{1000}$ dla $n \geqslant m$.

(a) $x_n = \frac{3n-2}{2n+1}$

(b) $x_n = \frac{3n^3+4n+5}{5n^3+6n^2+7}$

(c) $x_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{2n^2-3n+1}$

Rozwiązanie. (a) Obliczmy granicę:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3-\frac{2}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3 - 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{3-2\cdot 0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

$$x_n - g = \frac{3n-2}{2n+1} - \frac{3}{2} = \frac{-7}{2(2n+1)}$$

$$|x_n - g| = \frac{7}{2(2n+1)} < \frac{1}{1000} \iff 2n+1 > \frac{7\cdot 1000}{2} = 3500 \iff n > \frac{3499}{2} = 1750 - \frac{1}{2} \iff n \geqslant m := 1750$$

(b) Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+4n+5}{5n^3+6n^2+7} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3+4\frac{1}{n^2}+5\frac{1}{n^3})}{\lim_{n\to\infty}(5+6\frac{1}{n}+7\frac{1}{n^3})} = \frac{3}{5} = g$$

$$x_n - g = \frac{-18n^2+20n+4}{5(5n^3+6n^2+7)},$$

więc zachodzi:

$$|x_n - g| \leqslant \frac{18n^2+20n+4}{5(5n^3+6n^2+7)} \leqslant \frac{18n^2+20n^2+4}{5\cdot 5n^3} = \frac{42}{25n}$$

a zatem:

$$|x_n - g| < \frac{1}{1000} \text{ dla } n > \frac{42\cdot 1000}{25} = 42\cdot 40$$

(c) Z tożsamości $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ mamy

$$x_n = \frac{6n}{\sqrt{2n^2+3n+1} + \sqrt{2n^2-3n=1}} = \frac{6}{\sqrt{2+3n^{-1}+1n^{-2}} + \sqrt{2n-3n^{-1}+1n^{-2}}}$$

a zatem $g = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Mamy:

$$|M_n - \sqrt{g}| \leqslant |\sqrt{2+3n^{-1}+n^{-2}} - \sqrt{2}| = \frac{3n^{-1}-n^{-2}}{\sqrt{2+3n^{-1}+n^{-2}}} + \frac{|3n^{-1}-n^{-2}|}{\sqrt{2+3n^{-1}+n^{-2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4n^{-1}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \frac{4n^{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{6n^{-1}}{\sqrt{2}} < \frac{5}{n}.$$

Z kolei nierówność $|x_n - g| = |\frac{6}{M_n} - \frac{6}{\sqrt{8}}| < \varepsilon$ jest (przy $\varepsilon < \frac{6}{\sqrt{8}}$) równoważna z

$$\frac{-\varepsilon\sqrt{8}}{\frac{6}{\sqrt{8}}+\varepsilon} < M_n - \sqrt{8} < \frac{\varepsilon\sqrt{8}}{\frac{6}{\sqrt{8}}-\varepsilon},$$

więc będzie spełniona, gdy

$$|M_n - \sqrt{8}| < \frac{\varepsilon\sqrt{8}}{\frac{6}{\sqrt{8}}+\varepsilon} = \frac{8\varepsilon}{6+\varepsilon\sqrt{8}},$$

co dla $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ wynosi

$$\frac{8}{6000+\sqrt{8}} > \frac{8}{6008} = \frac{1}{751}.$$

Jeżeli więc $\frac{5}{n} < \frac{1}{751}$, czyli $n > 5 \cdot 751 = 3755$ to $|x_n - g| < \frac{1}{1000}$. Można, więc wziąć $m := 3745$.

♣

Zadanie 5.2. (Paweł Przybyła) Wykazać, że: a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$, b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Rozwiązanie. a) Gdy $a \geqslant 1$ oznaczmy $x_n := \sqrt[n]{a} - 1$, wtedy $x_n \geqslant 0$ oraz $a = (1+x_n)^n$, więc $a = (1+x_n)^n \geqslant 1 + nx_n$, z nierówności Bernulliego. stąd $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{a-1}{n}$, a więc z twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Czyli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

b) Niech $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$, wtedy $x_n \geqslant 0$ oraz $n = (1+x_n)^n \geqslant 1 + \binom{n}{2}x_n^2$ skąd $n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}x_n^2$, czyli $x_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ dla $n \geqslant 2$. Stąd teza.

♣

Zadanie 5.3. (Paweł Przybyła) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$.

Rozwiązanie I. Dla $x_n := n^2 \left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$ z nierówności Bernulliego otrzymujemy:

$$1 + \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{x_n}{n^2}\right)^n \geqslant 1 + \frac{nx_n}{n^2} = 1 + \frac{x_n}{n},$$

a więc $x_n \leqslant 1$, z drugiej strony zaś mamy:

$$\frac{n}{n+1} = \left(\frac{1}{1+\frac{x_n}{n^2}}\right)^n = \left(1 - \frac{x_n}{n^2+x_n}\right)^n \geqslant 1 - \frac{nx_n}{n^2+x_n},$$

skąd $\frac{nx_n}{n^2+x_n} \geqslant \frac{1}{n+1}$, tzn. $x_n \geqslant \frac{n^2+x_n}{n^2+n} \geqslant \frac{n}{n+1}$. Z twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

♣

Rozwiązanie II. Nierówność Cauchy'ego (między średnią geometryczną i arytmetyczną) daje:

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = G\left(1+\frac{1}{n}, 1, ..., 1\right) \leqslant A\,(...) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + n - 1\right) = \frac{n^2+1}{n^2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = G\left(\frac{n}{n+1}, 1, ..., 1\right) \leqslant A\,(...) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1} + n - 1\right) = \frac{n^2+n-1}{n^2+n}$$

Wynika stąd identycznie jak poprzednio oszacowanie:

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant x_n \leqslant 1.$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. ♣

Zadanie 5.4. (Paweł Przybyła) Zbadać zbieżność, ewentualnie obliczyć granicę:

(a) $x_n := \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1} - 2^{-n}}$

(b) $x_n := \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2n + 3}$

(c) $x_n := \frac{n3^n + 2n^2 - 5}{n! + 1}$

(d) $x_n := \frac{n^n}{(n!)^2}$

(e) $x_n := \sqrt[n]{(1+x)^n + (1-x)^n}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ jest dane.

(f) $x_n := \frac{a^2}{1+a^{2n}}$, gdzie $a \geqslant 0$.

(g) $x_n := \frac{a^2}{1+a^n}$, gdzie $a \geqslant 0$.

(h) $x_n := \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} - \frac{3}{\sqrt[n]{3}-1}$

(i) $x_n := \cos \frac{n^2\pi}{n+2}$

(j) $x_n := \frac{n}{1+E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n})$

(k) $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Rozwiązanie. (a) $a_n := \frac{n}{n^2+1} - 2^{-n}$, wtedy $a_n \leqslant \frac{n}{n^2+1} \leqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ oraz $a_n \geqslant \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{2n} = \frac{n^2-1}{2n(n^2+1)} \geqslant \frac{1}{2n(n^2+1)} \geqslant \frac{1}{4n^3}$, a zatem $\frac{1}{\sqrt[n]{4}(\sqrt[n]{n})^3} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, skąd $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Alternatywnie: $x_n = \frac{y_n}{\sqrt[n]{n}}$, gdzie $y_n = \sqrt[n]{b_n}$, $b_n = \frac{n^2}{n^2+1} - \frac{n}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, korzystając z faktu: $\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$ mamy $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

(b) Ze wzorów $\sqrt{a} - \sqrt{b} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ oraz $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ otrzymujemy:

$$x_n = \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+3} - \sqrt[3]{n^3}\right) - \left(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2}\right) =$$

$$= \frac{2n^2+3}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+3)^2} + \sqrt[3]{(n^3+2n^2+3)n^3} + \sqrt[3]{n^6}} - \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} =$$

$$= \frac{2+3n^{-2}}{\sqrt{(1+2n^{-1}+3n^{-3})^2} + \sqrt[3]{1+2n^{-1}+3n^{-3}} + 1} - \frac{2+n^{-1}}{\sqrt{1+2n^{-1}+3n^{-2}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{3}.$$

(c) Szacujemy $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{x3^n+n3^n+0}{n!} = \frac{23^n}{(n-1)!} =: a_n$ przy czym $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{n} \leqslant \frac{3}{4}$ dla $n \geqslant 4$, skąd $a_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} a_4$, czyli $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(d) Niech $x_n = a_1 a_2 ... a_n$, gdzie $a_k := \frac{n}{k(n+1-k)}$; mamy przy tym $a_k \leqslant 1$ (gdyż $k(n+1-k) = n+(k-1)(n-k) \geqslant n$), a ponadto $n = 2m-1 \Rightarrow a_m = \frac{2m-1}{m^2} \leqslant \frac{4}{2m-1}$, $n = 2m \Rightarrow a_m = \frac{2m}{m(m+1)} \leqslant \frac{4}{2m}$ czyli zawsze $a_n \leqslant \frac{4}{n}$. Stąd także $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{4}{n}$, więc zawsze $a_m \leqslant \frac{4}{n}$. Stąd także $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{4}{n}$, więc $\lim_{n\to\infty} = 0$.

(e) Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 1 + |x|$. Można założyć, że $x > 0$, wtedy $x_n = (1+x)\sqrt[n]{1+u^n}$, gdzie $u := \frac{1-x}{1+x}$, $|u| < 1$. Stąd $(1+x)\sqrt[n]{1-|u|} \leqslant x_n \leqslant (1+x)\sqrt[n]{1+1}$, więc $\lim_{n\to\infty} x_n = 1 + x = 1 + |x|$.

(f) $\begin{cases} 0, \text{ dla } a \neq 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ dla } \ a = 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 0, \text{ dla } 0 \leqslant a < 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ dla } \ a = 1 \\ 1, \text{ dla } \ a > 1 \end{cases}$

(h) Przekształcamy:

$$x_n = \frac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}-3}{\sqrt[n]{8}-1} = \frac{(\sqrt[n]{2}-1)+(\sqrt[n]{4}-1)}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1)} = \frac{1+(\sqrt[n]{2}+1)}{\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

(i) Ciąg rozbieżny: $\frac{n^2}{n+2} = n-2+\frac{4}{n+2}$, zatem $x_n = \cos\left[(n-2)\pi + \frac{4\pi}{n+2}\right] = (-1)^n \cos\frac{4\pi}{n+2}$, przy czym $\frac{4}{n+2} \leqslant \frac{1}{3}$ dla $n \geqslant 10$. Stąd dla $n \geqslant 10$: $x_n \geqslant \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ dla $2 \mid n$, $x_n \leqslant -\frac{1}{2}$ dla $2 \nmid n$. (a więc $|x_n - x_n| \geqslant \frac{1}{2}$, czyli warunek Cauchy'ego nie jest spełniony).

(j) Ciąg rozbieżny, gdyż np. $x_{k^2-k} = 1 - \frac{1}{k} \longrightarrow 1$, $x_{k^2} = \frac{-k}{k+1} \longrightarrow -1$.
Uwaga: $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cup]-1,1[$, tzn. wyrazy tego ciągu dają zbiór wszystkich liczb wymiernych z przedziału $]-1,1[$. Istotnie każde $n \in \mathbb{N}$ można przedstawić (jednoznacznie) w postaci $n = k^2 + l$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $l \in \overline{0, 2k}$. Mamy wtedy $x_n = \frac{l-k}{k+1}$, przy czym $(l-k) \in \overline{-k, k}$.

(k) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant x_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, a więc $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

♣

Zadanie 5.5. (Aleksandra Oszmian) Dwa ciągi liczbowe (x_n), (y_n) spełniają warunek $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Jeden z tych ciągów jest rosnący, a drugi malejący. Wykazać, że oba ciągi są zbieżne, a ich granice są równe.

Rozwiązanie. Wystraczy wykazać, że jeden z tych ciągów jest zbieżny.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że (x_n) jest rosnący a (y_n) - malejący. Pokażemy, że (x_n) jest ograniczony.

Załóżmy, że (x_n) jest rosnący i nieograniczony. Możemy wówczas skonstruować podciąg (x_{n_k}) o tej własności, że:

$$x_{n_{k+1}} > E(x_{n_k}) + 2.$$

Podciąg ten jest rosnący oraz $x_{n_{k+1}} = x_{n_k} > 1$. Skorzystamy teraz z warunku $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n_k} - y_{n_k}) = 0$. Używając tego samego $k \to n_k$, rozważmy podciąg (y_{n_k}). Wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n_k} - y_{n_k}) = 0$, a więc istnieje K takie, że dla $k > K$ zachodzi $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{4}$. Inaczej można zapisać: $y_{n_k} \in (x_{n_k} - \frac{1}{4}, x_{n_k} + \frac{1}{4})$.
Skoro $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} > 1$, to $y_{n_{k+1}} - y_{n_k} > \frac{1}{2}$. Zatem w szczególności $y_{n_{k+1}} > y_{n_k}$, co jest sprzeczne z załozeniem, że (y_n) jest malejący.

Wykazaliśmy, ze (x_n) jest ograniczony. Z założenia wiadomo, że (x_n) jest rosnący, co oznacza, że x_n jest zbieżny. Łatwo wykazać, że (y_n) też jest ograniczony.

Weźmy M takie, że $|x_n| < M$ oraz N takie, że dla $n > N$ zachodzi $|y_n - x_n| < 1$. Wtedy $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \in [A, B]$, gdzie
$A = \min\{-M-1, y_1, y_2, ..., y_N\}$, $B = \max\{M+1, y_1, y_2, ..., y_N\}$.
Zatem (y_n) jest ograniczony i malejący, a więc zbieżny. Równość granic jest oczywista. ♣

Zadanie 5.6. (Aleksandra Oszmian) Zdefiniujmy rekurencyjnie dwa ciągi (a_n) i (b_n):

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$$
$$b_1 = 2,\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n.$$

Udowodnić, że

$$\inf\{\frac{a_n}{b_n} : n \in \mathbf{N}\} = \sqrt{2}.$$

Rozwiązanie. Zdefiniujmy ciąg (x_n) w następujący sposób: $x_n = \frac{a_n}{b_n}$.
Wówczas $x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{3a_n+4b_n}{2a_n+3b_n} = \frac{3\frac{a_n}{b_n}+4}{2\frac{a_n}{b_n}+3} = \quad = \frac{3x_n+4}{2x_n+3} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2x_n+3}$.
$x_{n+1} - x_n = \frac{3x_n+4}{2x_n+3} - x_n = \frac{3x_n+4-2x_n^2-3x_n}{2x_n+3} = 2\frac{2-x_n^2}{2x_n+3} = 2\frac{(\sqrt{2}-x_n)(\sqrt{2}+x_n)}{2x_n+3} = \frac{(\sqrt{2}-x_n)(\sqrt{2}+x_n)}{x_n+\frac{3}{2}}$.

Dla dodatnich argumentów $f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}$ ma dodatnie wartości, więc (x_n) jest dodatni.
Ponadto $f([\sqrt{2}, \infty)) =]\sqrt{2}, \frac{3}{2}[$. Zatem $\forall n\ x_n \subset]\sqrt{2}, \frac{3}{2}[$, a więc (x_n) jest monotonicznie malejący.

Powyższe informacje gwarantują, że $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in [\sqrt{2}, \frac{3}{2}$.
Twierdzenie o ciągach monotonicznych i ograniczonych mówi, że ciągi te są zbieżne. Jeśli (x_n) jest zbieżny, to jego granica g spełnia

$$f(g) = g \Longrightarrow g = \pm\sqrt{2}$$

a skoro $x_n > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$, tzn. $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \sqrt{2}$. ♣

Zadanie 5.7. (Aleksandra Oszmian) Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (x_n) jest ograniczony oraz

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

to zbiór punktów skupienia jest odcinkiem domkniętym $[a, b]$, gdzie $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$.

Rozwiązanie. Niech (x_n) będzie ciągiem z zadania. Mogą zdarzyć się dwie sytuacje:

$$(1) \limsup x_n = \liminf x_n = g \text{ lub } (2) \liminf x_n < \limsup x_n$$

W pierwszym przypakdu ciąg (x_n) jest zbieżny, w szczególności ma jeden punkt skupienia i odcinek, o którym mowa, jest jednopunktowy $[g, g] = \{g\}$.
W drugim przypakdu oznaczamy jak w treści zadania $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$ i rozważamy odcinek $[a, b]$. Z wykładu wiadomo, że zarówno a, jak i b są punktami skupienia ciągu (x_n). Weźmy dowolne α takie, ze $a < \alpha < b$. Skonstuujmy podciąg ciągu (x_n) zbieżny do α. W tym celu potrzebujemy podciągu $x_{k(n)} \longrightarrow a$ i $x_{m(n)} \longrightarrow b$.

Ustalmy $\epsilon > 0$, $\epsilon < \frac{b-a}{4}$ i wybierzmy N_1 takie, że $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ dla $n > N_1$.

Wybieramy n takie, ze $k(n) > N_1$ i $|x_{k(n)} - a| < \epsilon$ oraz n' takie, ze $m(n') > N_1$, $m(n') > k(n)$ i $|x_{m(n')} - b| < \epsilon$. Oznaczamy $K_1 = k(n)$ oraz $M_1 = m(n')$.

Wiadomo, że $M_1 > K_1 > N_1$. Kolejne wyrazy ciągu od x_{K_1} do x_{M_1} są od siebie w odległości nie większej niż ϵ. Jednocześnie $a < \alpha < b$ oraz x_{K_1} jest w pobliżu a, zaś x_{M_1} jest w pobliżu b. W zbiorze $\{x_{K_1}, ..., x_{M_1}\}$ jest więc element spełniający warunek

$$|x_{K_1+p} - \alpha| < \tfrac{\epsilon}{2}, \text{ gdzie oznaczamy } K_1 + p = \phi(1).$$

Weźmy $\frac{\epsilon}{2}$ i powtórzmy konstrukcję wybierając N_2 takie, że dla $n > N_2$ zachodzi $|x_{n+1} - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Wybieramy n takie, ze $k(n) > N_2$, $k(n) > M_1$ i $|x_{k(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2}$; oznaczamy $K_2 = k(n)$. Podobnie wybieramy n' takie, ze $m(n') > N_2$, $m(n') > K_2$ i $|b - x_{m(n')}| < \frac{\epsilon}{2}$; oznaczamy $M_2 = m(n')$.
Ponownie argumentujemy, że w zbiorze $\{x_{K_2}, ..., x_{M_2}\}$ jest element spełniający

$$|x_{K_2+p} - \alpha| < \tfrac{\epsilon}{4}, \text{ gdzie oznaczamy } K_2 + p = \phi(2).$$

Podobnie konstruujemy $\phi(3)$ dla $\frac{\epsilon}{4}$ i $\phi(n)$ dla $\frac{\epsilon}{2^{n-1}}$ otrzymując

$$|x_{\phi(n)} - \alpha| < \tfrac{\epsilon}{2^n}.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\phi(n)} = \alpha$ i α jest punktem skupienia ciągu (x_n). Ponadto α było dowolnym elementem (a, b). Wykazaliśmy więc, że każdy punkt skupienia odcinka $[a, b]$ jest punktem skupienia ciągu (x_n). ♣

Zadanie 5.8. (Aleksandra Oszmian) Zbadać zbieżność ciągów i ewentualnie obliczyć ich granice.

a) $x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n_2)...(2n)}$
b) $y_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
c) $z_n = n^2((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} - 1)$

Rozwiązanie. a) Przypomnijmy następujący fakt: Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, to istnieje także granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ oraz granice te są równe (dla $a_n > 0$).

Piszemy $x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n_2)...(2n)} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)...(2n)}{n^n}}$ i oznaczamy $a_n = \frac{(n+1)...(2n)}{n^n}$.
Wówczas $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)...(2n)(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)(n+2)...(2n)} = \frac{(2n+1)2n^4}{(n+1)(n+1)^n} = 2\cdot\frac{2n+1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^n = 2\frac{2n+1}{n+1}(1-\frac{1}{n})^n \longrightarrow 2\cdot 2\cdot\frac{1}{e} = \frac{4}{e}$ przy $n \to \infty$.

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{4}{e}$.

b) Oznaczamy $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, $\quad b_n = n\sqrt{n}$. $\quad$ Ciąg b_n jest rosnący i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Chcemy skorzystać z twierdzenia Stolza. W tym celu sprawdzamy, czy istnieje granica ciągu $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}} \to \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

przy $n \to \infty$.

c) W tym podpunkcie skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach i z nierówności dotyczacych funkcji exp oraz log.

$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{1+x} &\leqslant \log(1+x) \leqslant x;\ \text{niech } x = \tfrac{1}{n} \\
\tfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} &\leqslant \log(1+\tfrac{1}{n}) \leqslant \tfrac{1}{n} \qquad /: n \\
\tfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} &\leqslant \tfrac{1}{n}\log(1+\tfrac{1}{n}) \leqslant \tfrac{1}{n^2} \qquad /\text{exp - funkcja rosnąca zachowuje nierówności} \\
\exp(\tfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}) &\leqslant (1+\tfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \leqslant \exp(\tfrac{1}{n^2}) \qquad /-1 \\
\exp(\tfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}) - 1 &\leqslant (1+\tfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \exp(\tfrac{1}{n^2} - 1 \qquad /\cdot n^2 \\
n^2(\exp(\tfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}) - 1) &\leqslant z_n \leqslant n^2(\exp(\tfrac{1}{n^2} - 1)
\end{aligned}$$

Dla lewej cześci nierwóności zachodzi:

$$\begin{aligned}
\exp(x) &\geqslant 1 + x \qquad /-1 \\
\exp(x) - 1 &\geqslant x \\
\exp(\tfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}) - 1 &\geqslant \tfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \qquad /\cdot n^2 \\
n^2(\exp(\tfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}) - 1) &\geqslant \tfrac{1}{1+\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Podobnie dla prawej części nierówności mamy:

$$n^2(\exp(\tfrac{1}{n^2} - 1) \leqslant \tfrac{1}{1-\frac{1}{n^2}}$$

Zatem otrzymaliśmy:

$$\tfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \leqslant z_n \leqslant \tfrac{1}{1-\frac{1}{n^2}}$$

Oba ciągi, po prawiej i lewej stronie nie równości, zbiegają do 1 przy $n \to \infty$. Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. ♣

Zadanie 5.9. (Gabriela Szwed) Dane są $\varphi, Q \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o wyrazach $x_n = \sin(n\varphi + Q)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$ i $Q \in \pi\mathbb{Z}$ (wtedy $\forall n\ x_n = 0$) lub $\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$ (wtedy $\forall n\ x_n = \sin Q$).

Rozwiązanie. Dowód $\Rightarrow$ Mamy następującą tożsamość trygonometryczną:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$$

a zatem

$$x_{n+1}\cdot x_{n-1} = \sin(n\varphi + Q + \varphi)\sin(n\varphi + Q - \varphi) = \sin^2(n\varphi + Q) - \sin^2\varphi$$

czyli

$$x_{n+1}\cdot x_{n-1} - x_n^2 = -\sin^2\varphi$$

Jeśli (x_n) jest zbieżny to:

$$0 = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}\cdot x_{n-1} - x_n^2) = \lim_{n\to\infty}(-\sin^2\varphi) = -\sin^2\varphi$$

a więc z istnienia $\lim x_n$ wynika $\sin\varphi = 0$, czyli $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$, tzn. $\varphi = k\pi$. Jeżeli przy tym $2 \nmid k$, to

$$x_{2l} = \sin(2kl\pi + Q) = \sin Q$$

$$x_{2l+1} = \sin(2kl\pi + k\pi + Q) = \sin(k\pi + Q) = -\sin Q$$

więc zbieżność (x_n) implikuje $\sin Q = 0$, tzn. $Q \in \pi\mathbb{Z}$.
Dowód $\Leftarrow$
Gdy $\varphi, Q \in \mathbb{Z}$, czyli $\varphi = p\pi_{p\in\mathbb{N}}$ i $Q = k\pi_{k\in\mathbb{N}}$

$$x_n = \sin(np\pi + k\pi) = \sin[\pi(np+k)] = 0$$

Ciąg jest stały, a więc zbieżny.
Gdy $\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$, czyli $\varphi = 2p\pi_{p\in\mathbb{N}}$

$$x_n = \sin(2pn\pi + Q) = \sin Q$$

Ciąg stały, a więc zbieżny. ♣

Zadanie 5.10. (Gabriela Szwed) Wykazać, że ciąg o wyrazach $x_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ jest zbieżny.

Rozwiązanie.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

czyli (x_n) jest rosnący. Weźmy

$$\widetilde{x}_n := x_n + \frac{1}{2n+1}$$

wtedy

$$\widetilde{x}_{n+1} - \widetilde{x}_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$$

a więc $(\widetilde{x}_n)$ jest malejący. Łatwo zauważyć, że $x_1 < x_n < \widetilde{x}_n < \widetilde{x}_1$, a zatem (x_n) ograniczony z góry (i rosnący), a $\widetilde{x}_n$ jest ograniczony z dołu (i malejący). Stąd widać, że te ciągi są zbieżne, przy czym

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\widetilde{x}_n$$

gdyż

$$\lim_{n\to\infty}(\widetilde{x}_n - x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0.$$

♣

Zadanie 5.11. (Gabriela Szwed) Wykazać zbieżność ciągu o wyrazach $x_n := 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Rozwiązanie.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} - \frac{2}{2\sqrt{n+1}} > 0$$

a więc (x_n) jest rosnący. Z kolei dla

$$\widetilde{x}_n := 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

zachodzi

$$\widetilde{x}_n \geqslant x_n$$

oraz

$$\widetilde{x}_{n+1} - \widetilde{x}_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} - \frac{2}{2\sqrt{n+1}} < 0$$

a więc $(\widetilde{x}_n)$ jest malejący i $x_1 < x_n < \widetilde{x}_n < \widetilde{x}_1$. Zatem (x_n) jest ograniczony z góry (i rosnący), a $\widetilde{x}_n$ jest ograniczony z dołu (i malejący). Stąd widać, że te ciągi są zbieżne, przy czym

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n$$

gdyż

$$\lim_{n\to\infty} (\widetilde{x}_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

♣

Zadanie 5.12. (Gabriela Szwed) Niech $x_n \coloneqq (1-a)(1+a^2)(1-a^3)\dots(1+(-a)^n)$ dla $0 \leqslant a < 1$. Wykazać zbieżność (x_n) do granicy o wartości dodatniej.

Rozwiązanie.

$$\frac{x_{2n}}{x_{2n-2}} = (1-a^{2n-1})(1+a^{2n}) \leqslant (1-a^{2n-1})(1+a^{2n-1}) = 1 - a^{4n-2} < 1$$

a zatem ciąg (x_{2n}) jest malejący i ograniczony z dołu (przez 0), więc jest zbieżny. Z kolei

$$\frac{x_{2n+1}}{x_{2n-1}} = (1+a^{2n})(1-a^{2n+1}) = 1 + a^{2n}(1-a-a^{2n+1}) > 1$$

dla prawie wszystkich n, czyli ciąg (x_{2n+1}) jest od pewnego miejsca rosnący. Ciągi (x_{2n}) i (x_{2n+1}) są zbieżne do tej samej granicy, gdyż

$$(x_{2n+1}) = (x_{2n})(1-a^{2n+1})$$

zatem $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$. ♣

Zadanie 5.13. (Gabriela Szwed) Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 \geqslant 1$ dane, $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$.

Rozwiązanie. Dla

$$f(x) \coloneqq \frac{2}{1+x}, f \ : [0,\infty[\to [0,\infty[$$

mamy:

$$f(x) - x = \frac{(1-x)(2+x)}{1+x}$$

więc jedynym punktem stałym f na $[0,\infty[$ jest $\widehat{x} = 1$, oraz wobec

$$f(x) - \widehat{x} = f(x) - 1 = \frac{1-x}{1+x}$$

mamy $f([0,1]) \subset [1,\infty[$, $f([1,\infty[) \subset [0,1]$, więc wartości x_n oscylują wokół $\widehat{x} = 1$. Rozbijamy (x_n) na podciągi (x_{2n}), (x_{2n+1}) opisane rekurencją daną poprzez $g = f \circ f$, tj $g(x) = f(\frac{2}{1+x}) = \frac{2+2x}{3+x}$. Mamy:

$$g(x) - x = \frac{(1-x)(2+x)}{3+x} \begin{cases} \geqslant 0 \text{ na } [0,1] \\ \leqslant 0 \text{ na } [1,\infty[\end{cases}$$

Zatem (x_{2n}) (o wyrazach z $[1,\infty[$) jest malejący i ograniczony z dołu (czyli zbieżny), zaś (x_{2n+1}) (o wyrazach z $[0,1]$) jest rosnący i ograniczony z góry (czyli zbieżny). Stąd $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 1$ (bo 1 jest jedynym punktem stałym g), co daje $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. ♣

Zadanie 5.14. (Damian Kayzer) Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (x_n) jest zbieżny to zbiór $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ zawiera swój kres górny lub dolny.

Rozwiązanie. Założmy, że $\exists k\colon x_k > x := \lim_{n\to\infty} x_n$ i weźmy $\varepsilon := x_k - x$. Z definicji granicy wiadomo, że $\exists N\ \forall n > N\colon\ x_n < x + \varepsilon = x_k$, czyli wyrazy o wyższych indeksach niż N są mniejsze od x_k, co oznacza, że największy wyraz ciągu znajduje się wśród pierwszych N wyrazów i jest on ograniczeniem górnym zbioru X, więc jest równy supremum zbioru X:

$$\sup X = \max\{x_1, ..., x_N\}.$$

Analogicznie wnioskujemy, że jeśli istnieje wyraz $x_k < x$, to infimum będzie najmiejszym wyrazem ciągu. Natomiast, gdy nie istnieje wyraz ani większy, ani mniejszy od granicy to mamy do czynienia z ciągiem stałym, a wtedy

$$x = \sup X = \inf X.$$

♣

Zadanie 5.15. (Damian Kayzer) Granicę dolną i górną można alternatywnie zdefiniować następująco:

$$a = \liminf x_n \iff \left(\begin{array}{c} \text{w zbiorze }]-\infty, t] \text{ jest:} \\ \text{nieskończenie wiele wyrazów ciągu } (x_n),\ \text{dla } t > a \\ \text{skończenie wiele wyrazów ciągu } (x_n),\ \text{dla } t < a \end{array} \right)$$

$$b = \limsup x_n \iff \left(\begin{array}{c} \text{w zbiorze } [t, \infty[\text{ jest:} \\ \text{skończenie wiele wyrazów ciągu } (x_n),\ \text{dla } t > b \\ \text{nieskończnie wiele wyrazów ciągu } (x_n),\ \text{dla } t < b \end{array} \right)$$

Udowodnić podane równoważności.

Rozwiązanie. Dowód przeprowadzimy tylko dla granicy dolnej, gdyż dla granicy górnej jest analogiczny.

1.1° ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że $t > a$ i w zbiorze $]-\infty, t]$ jest skończenie wiele wyrazów ciągu (x_n). Oznacza to, że $\exists N\ \forall n > N : x_n > t$, czyli liczba t jest ograniczeniem dolnym zbioru $X_N := \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\}$. Mamy więc

$$t \leqslant \inf X_N = \inf_{n>N} x_n \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{n>N} x_n = \liminf x_n = a,$$

co jest sprzecznością z założeniem $t > a$.

1.2° ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że $t < a$ i w zbiorze $]-\infty, t]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n) i ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Ponieważ zbiór X_N nie zawiera tylko skończonej liczby wyrazów ciągu (x_n), to musi być w nim nieskończenie wiele wyrazów spełniających $x_n \leqslant t$, a to oznacza, że $\inf X_N \leqslant t$. Z dowolności N wnioskujemy, że $\sup_{N\in\mathbb{N}} \inf X_N \leqslant t$, czyli otrzymaliśmy sprzeczność:

$$a = \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf X_N \leqslant t < a.$$

2° ($\Longleftarrow$) Na mocy założenia: $\forall k \in \mathbb{N}$ w zbiorze $]-\infty, a + \frac{1}{k}]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n), więc także elementów zbioru X_N, wobec tego $\inf X_N \leqslant a + \frac{1}{k}$. Ponieważ nierówność jest prawdziwa dla każdego k, to $\inf X_N \leqslant a$, czyli a jest ograniczeniem górnym zbioru $\{\inf X_N : N \in \mathbb{N}\}$. Pokażmy, że jest to najmniejsze ograniczenie górne. Z założenia w zbiorze $]-\infty, a - \frac{1}{k}]$ jest tylko skończenie wiele wyrazów ciągu (x_n), a to oznacza, że $\exists N_k\ \forall n > N_k : x_n > a - \frac{1}{k}$, więc $\inf X_{N_k} \geqslant a - \frac{1}{k}$. Jeśli weźmiemy dowolne $b < a$ to istnieje takie k, że

$$b < a - \frac{1}{k} \leqslant \inf X_{N_k}.$$

więc b nie jest ograniczeniem górnym zbioru $\{\inf X_N : N \in \mathbb{N}\}$. Zatem udowodniliśmy, że

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \inf X_N = a.$$

♣

Zadanie 5.16. (Damian Kayzer) Niech E będzie zbiorem punktów skupienia ograniczonego ciągu (x_n), czyli

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \text{istnieje podciąg } (x_{n_k}) \text{ zbieżny do } x\}.$$

Udowodnić, że $\liminf x_n = \inf E$ i $\limsup x_n = \sup E$.

Rozwiązanie. Dowód przeprowadzimy tylko dla granicy dolnej, gdyż dla granicy górnej jest analogiczny.

Niech $a := \liminf x_n$. Z definicji granicy dolnej podanej w zadaniu 5.15 wynika, że $\forall k \in \mathbb{N}$ zbiór $]-\infty, a-\frac{1}{k}]$ zawiera tylko skończenie wiele wyrazów ciągu (x_n), natomiast $]-\infty, a+\frac{1}{k}]$ zawiera ich nieskończenie wiele. Stąd $A_k :=]a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}]$ również zawiera nieskończenie wiele wyrazów. Możemy więc, wybrać wyrazy $x_{n_k} \in A_k$ tworzące podciąg, który jest zbieżny do a. Zatem a jest punktem skupienia, pokażmy że najmniejszym. Jeśli $b < a$ to w zbiorze $]-\infty, \frac{a+b}{2}]$ jest skończenie wiele wyrazów ciągu ($b < \frac{a+b}{2} < a$), więc nie można utworzyć podciągu zbieżnego do b, czyli $b \notin E$ i $a = \inf E$.

Załóżmy teraz, że $c = \inf E$ i dla dowolnego $t < c$ w zbiorze $]-\infty, t]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n). Stąd wynika, że możemy wybrać podciąg (x_{n_k}) wyrazów leżących na $]-\infty, t]$. W treści zadania założyliśmy, że (x_n) jest ograniczony, więc $\exists M \ \ \forall n : M < x_n$. Więc wyrazy ciągu (x_{n_k}) leżą w odcinku $[M, t]$, z twierdzenia Bolzana-Weierstrassa wiemy, że tenże ciąg ma podciąg zbieżny do punktu $x \in [M, t]$, co oznacza, że $x \in E$, co jest sprzeczne z definicją c.

Z kolei gdy $t > c$ i zakładamy, że w zbiorze $]-\infty, t]$ jest skończenie wiele wyrazów ciągu, to w odcinku $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, gdzie $\varepsilon < t-c$, również jest ich skończenie wiele, co oznacza, że nie ma w nim żadnego punktu skupienia, co stoi w sprzeczności z definicją c. ♣

Zadanie 5.17. (Damian Kayzer) Wykaż, że jeśli ciag liczbowy (x_n) jest ograniczony oraz spełnia warunek

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n-1} - x_n) = 0,$$

to zbiór E punktów skupienia ciągu (x_n) jest odcinkiem domkniętym $[a, b]$, gdzie $a = \liminf x_n$ i $b = \limsup x_n$.

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \text{istnieje podciąg } (x_{n_k}) \text{ zbieżny do } x\}$$

Rozwiązanie. Ciąg jest ograniczony od dołu więc istnieje $\inf\limits_{n>N} x_n$, a ponieważ jest ograniczony od góry to istnieje $a = \sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \inf\limits_{n>N} x_n = \liminf x_n$, analogicznie wnioskujemy istnienie
$b = \limsup x_n$.

Pokażemy teraz, że każdy punkt $x \in [a, b]$ jest punktem skupienia ciągu (x_n), w tym celu skonstruujmy podciąg (x_{n_k}) w następujący sposób:

$$n_1 - \text{najmiejszy indeks taki, że:} \quad x_{n_1} > x - 1$$

$$n_2 > n_1 - \text{najmiejszy indeks taki, że:} \quad x_{n_2} < x + \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$n_k > n_{k-1} - \text{najmiejszy indeks taki, że:} \quad x_{n_k} \begin{cases} > x + \frac{(-1)^k}{k}, & \text{gdy } k \text{ jest nieparzyste} \\ < x + \frac{(-1)^k}{k}, & \text{gdy } k \text{ jest parzyste} \end{cases}$$

Aby się przekonać o istnieniu wyrazów x_{n_k} o podanej własności można skorzystać z definicji 5.15 granicy górnej i dolnej: $x + \frac{1}{k} > a$, więc w zbiorze $]-\infty, x+\frac{1}{k}]$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu, czyli zawsze można wybrać wyraz $x_{n_k} < x + \frac{1}{k}$. Podobnie: $x - \frac{1}{k} < b$, więc w zbiorze $[x-\frac{1}{k}, \infty[$ jest nieskończnie wiele wyrazów ciągu, czyli istnieje $x_{n_k} > x - \frac{1}{k}$.

Rozważmy parzyste indeksy k. Będziemy starać się oszacować wyrażenie $|x_{n_k} - x|$, aby wykazać zbieżność (x_{n_k}). Jeśli $x_{n_k} \geqslant x$ to z konstrukcji wiadomo, że:

$$x_{n_k} - x < \frac{1}{k}. \tag{1}$$

Natomiast do zbadania przypadku $x_{n_k} < x$ zauważmy, że $x_{n_k-1} > x - \frac{1}{k-1}$. Jest tak ponieważ, gdyby $x_{n_k-1} \leqslant x - \frac{1}{k-1}$ to $n_k - 1 \neq n_{k-1}$ (wynika to z definicji nieparzystych wyrazów podciągu (x_{n_k})), więc $n_k - 1$ jest mniejszym od n_k i większym od n_{k-1} indeksem dla którego spełnione jest $x_{n_k-1} < x + \frac{1}{k}$, co jest sprzeczne z definicją n_k jako najmniejszego indeksu o tej własności. Korzystając z tej nierówności mamy oszacowanie:

$$x - x_{n_k} < x_{n_k-1} - x_{n_k} + \frac{1}{k-1}. \tag{2}$$

Łącząc 1 i 2 otrzymujemy

$$|x_{n_k} - x| < |x_{n_k} - x_{n_k-1}| + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}.$$

Wyrażenia $\frac{1}{k}$ i $\frac{1}{k-1}$ są zbieżne do zera, również wyrażenie $|x_{n_k} - x_{n_k-1}|$ jest zbieżne do zera na mocy założenia o ciągu (x_n), zatem x jest granicą ciągu parzystych wyrazów ciągu (x_{n_k}). Co oznacza, że wskazaliśmy podciąg ciągu (x_n) zbieżny do x, czyli wykazaliśmy, że x jest punktem skupienia. Podobne rozumowanie można by przeprowadzić dla nieparzystych k i przekonać się, że cały ciąg (x_{n_k}) jest zbieżny do x.

Na koniec pokażemy, że odcinek $[a, b]$ zawiera wszystkie punkty skupienia. Niech $x \notin [a, b]$, dla ustalenia uwagi załóżmy, że $x < a$ i weźmy δ taką, że $x < \delta < a$. Z definicji a wynika, że na półprostej $]-\infty, \delta]$ leży skończenie wiele wyrazów ciągu (x_n), co oznacza, że w otoczeniu punktu x jest tylko skończona ilość wyrazów ciągu, więc nie można skonstruować podciągu który byłby zbieżny do x. ♣

Zadanie 5.18. (Damian Kayzer) Dla danego ciągu liczbowego (x_n) wyznaczyć: $\liminf x_n$, $\limsup x_n$, kresy zbioru $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ oraz zbiór punktów skupienia ciągu (x_n).

a) $x_n := \frac{n}{1+E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n})$ b) $x_n := (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{2n+25} + 1\right)$ c) $x_n := \frac{n}{10} + \frac{3}{n} - E\left(\frac{n}{10}\right)$

Rozwiązanie. a) Aby pozbyć się pierwiastka i części całkowitej rozłóżmy liczbę n na sumę liczby kwadratowej i resztę: $n = k^2 + l$, gdzie $0 \leqslant l < 2k + 1$, wtedy

$$k \leqslant \sqrt{k^2 + l} < \sqrt{k^2 + 2k + 1} = k + 1,$$

czyli $E(\sqrt{n}) = k$. Po podstawieniu wyraz ogólny ciągu upraszcza się do:

$$x_n = \frac{l - k}{1 + k}.$$

Korzystając z nierówności definiujących l otrzymujemy:

$$-1 < \frac{-k}{1 + k} \leqslant x_n \leqslant \frac{k}{1 + k} < 1.$$

Podciąg $(x_{k^2}) = (\frac{-k}{1+k})$ jest zbieżny do -1 które jest ograniczeniem dolnym zbioru X. Jest to największe ograniczenie dolne, ponieważ zbieżność podciągu (x_{k^2}) gwarantuje, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że $x_N \in]-1, -1 + \varepsilon[$. Ponieważ podciąg $(n_{k^2+2k}) = (\frac{k}{1+k})$ jest zbieżny do 1, to podobnie wnioskujemy, że 1 jest najmniejszym ograniczeniem górnym, czyli mamy $\sup X = 1$ i $\inf X = -1$.

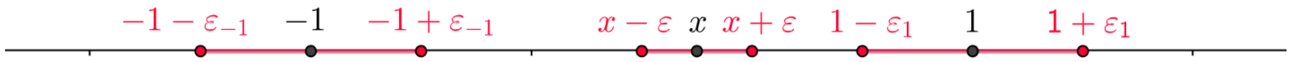
Zbieżność podciągów oznacza, że -1 i 1 są punktami skupienia, a ponieważ są ograniczeniami, to są najmniejszym i największym punktem skupienia, zatem zgodnie z treścią zadania 5.16: $\liminf x_n = -1$ i $\limsup x_n = 1$.

Aby znaleźć zbiór punktów skupienia zwróćmy uwagę, że dla ustalonego k wyrazy ciągu należące do zbioru $\{x_{k^2+l} : 0 \leqslant l < 2k + 1\}$ dzielą odcinek $[-1, 1]$ na części o długości $\frac{1}{1+k}$. Wobec tego, jeśli weźmiemy dowolny $x \in [-1, 1]$, to dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $l_k \in \overline{0, 2k}$, że $|x_{k^2+l_k} - x| \leqslant \frac{1}{1+k}$. Czyli istnieje podciąg $(x_{k^2+l_k})$ zbieżny do x, więc $[-1, 1]$ jest zbiorem punktów skupienia.

b) Rozważmy podciągi wyrazów parzystych i nieparzystych:

$$x_{2k} = \frac{\sqrt{2k}}{4k + 25} + 1 \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

$$x_{2k+1} = -\frac{\sqrt{2k+1}}{4k + 27} - 1 \xrightarrow{k\to\infty} -1$$



Rysunek 4: Otoczenia punktów $-1, 1$ i x

Pokażemy, że -1 i 1 są jedynymi punktami skupienia ciągu (x_n). Weźmy dowolny $x \in \mathbb{R}$ i dodatnie $\varepsilon, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_1$ dobrane tak jak na rysunku 4, czyli tak by odcinki $[-1-\varepsilon_{-1}, -1+\varepsilon_{-1}]$, $[1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1]$, $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ się nie przecinały. Wiemy, że w pierwszym z tych odcinków leżą prawie wszystkie wyrazy nieparzyste ciągu, a w drugim prawie wszystkie parzyste, więc w odcinku $[x+\varepsilon, x-\varepsilon]$ może leżeć conajwyżej skończona ilość wyrazów ciągu, czyli x nie jest punktem skupienia. Zgodnie z treścią zadania 5.16 $\liminf x_n = -1$ i $\limsup x_n = 1$.
Aby znaleźć kresy zbioru X zbadamy monotoniczność ciągu $(|x_n|)$.

$$|x_n| = \frac{\sqrt{n}}{2n+25} + 1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{50}}}{\sqrt{\frac{2n}{25}} + \sqrt{\frac{25}{2n}}} + 1$$

Monotoniczność zależy tylko od mianownika powyższego wyrażenia, który jest postaci $\varphi(x) := x + \frac{1}{x}$. φ jest malejąca na $]0,1]$, ponieważ mianownik wyrażenia $\varphi(x) - 2 = \frac{(1-x)^2}{x}$ jest rosnący, a licznik jest malejący na $]0,1]$. Natomiast φ jest rosnąca na $[1,\infty[$, ponieważ $\varphi(x) - 2 = x(1-\frac{1}{x})^2$ jest iloczynem funkcji rosnących na $[1,\infty[$. $\sqrt{\frac{2n}{25}} \leqslant 1 \iff n \in \overline{1,12}$, więc $|x_n|$ jest rosnąca dla $n \in \overline{1,12}$ i malejąca dla $n \geqslant 13$. Parzyste wyrazy (x_n) są dodatnie, a nieparzyste ujemne, więc szukamy supremum wśród parzystych, a infimum wśród nieparzystych. Z rozważań nad monotonicznością wynika, że x_{12} jest największym spośród pierwszych 6 parzystych wyrazów, a x_{14} jest największym z pozostałych parzystych, zatem należy je porównać. Z tej samej przyczyny trzeba porównać x_{11} i x_{13}. Ostatecznie: $\sup X = x_{12} = \frac{\sqrt{12}}{49} + 1$, $\inf X = x_{13} = -\frac{\sqrt{13}}{51} - 1$.

c) Podstawmy $n = 10k + l$, gdzie $l \in \overline{0,9}$:

$$x_n = \frac{l}{10} + \frac{3}{10k+l} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{l}{10}$$

Powyższe wyrażenie określa rodzinę podciągów ciągu (x_n), parametryzowaną przez l. Obliczając granicę tych podciągów wyznaczamy zbiór punktów skupienia $\left\{0, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{9}{10}\right\}$. Przeprowadzając podobne rozumowanie co w poprzednim podpunkcie można się przekonać, że są to jedyne punkty skupienia i $\liminf x_n = 0$ oraz $\limsup x_n = \frac{9}{10}$.

Wyrazy ciągu są dodatnie i istnieje podciąg zbieżny do 0 więc $\inf X = 0$. Natomiast $\sup X = x_1 = \frac{31}{10}$, ponieważ dla $n \geqslant 2$ mamy:

$$x_n = \frac{n}{10} - E\left(\frac{n}{10}\right) + \frac{3}{n} \leqslant \frac{9}{10} + \frac{3}{2} = \frac{24}{10} < x_1.$$

♣

Zadanie 5.19. (Damian Kayzer) Wyznaczyć kresy zbioru $Z := \left\{\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $z_n^m := \frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}}$. Jasne jest, że $z_n^m \leqslant 2$, a ponieważ $z_1^1 = 2$, to $\sup Z = 2$. Z nierówności między średnimi mamy:

$$\sqrt[m]{n \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{m-1}} \leqslant \frac{n+m-1}{m}$$

$$z_n^m \geqslant \frac{m}{n+m-1} + \frac{n}{n+m-1} = \frac{n+m}{n+m-1} > 1$$

$\inf Z = 1$, ponieważ $z_n^1 = \frac{1}{n} + 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$. ♣

Zadanie 5.20. (Krystian Gładych) Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to ciąg w przestrzeni metrycznej (X,d). Załóżmy, że dwa podciągi (y_k) i (z_k) ($y_k = x_{p(k)}, z_k = x_{q(k)}$, gdzie $p,q:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ są rosnące) zawierają łącznie prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n). Pokazać, że

$$\text{ciąg } (x_n) \text{ jest zbieżny} \iff \text{ciągi } (y_k) \text{ i } (z_k) \text{ są zbieżne i } \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} z_k$$

Rozwiązanie. Dowód $\Longleftarrow$: Z założenia zbiór $S := \{p(k) \mid k\in\mathbb{N}\}\cup\{q(k)\mid k\in\mathbb{N}\}$ ma skończone dopełnienie $S' = \mathbb{N}\setminus S$ w zbiorze $\mathbb{N}$. Niech $\lim y_k = \lim z_k = \hat{x}\in X$. Pokażemy, że $\lim x_k = \hat{x}$.

Dla danego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\begin{cases} \exists k'\in\mathbb{N} : \forall k > k' : d(x_{p(k)},\hat{x}) < \varepsilon \\ \exists k''\in\mathbb{N} : \forall k > k'' : d(x_{q(k)},\hat{x}) < \varepsilon \end{cases} \tag{3}$$

Niech $n_0\in\mathbb{N}$ to element maksymalny zbioru skończonego $S'\cup\{p(1),...,p(k'),q(1),...,q(k'')\}$. Wtedy dla każdego $n\in\mathbb{N}$ takiego, że $n > n_0$ mamy

$$(n\in(S'\cup\{p(1),...,p(k'),q(1),...,q(k'')\})' = S\setminus\{p(1),...,q(k'')\}),$$

co jest równoważne

$$((\exists k > k' : n = p(k)) \text{ lub } (\exists k > k'' : n = q(k))).$$

Z (3) wynika więc, że $\forall n > n_0 : d(x_n,\hat{x}) < \varepsilon$, czyli $\lim x_n = \hat{x}$.

Dowód $\Longrightarrow$: Zauważmy, że $p(k), q(k) \geqslant k$ dla $k\in\mathbb{N}$. Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$; pokażemy, że wtedy także $\lim y_k = \hat{x}$. Dla dowolnego danego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0\in\mathbb{N}$, że $\forall n > n_0 : d(x_n,\hat{x}) < \varepsilon$; stąd, jeżeli $k > n_0$, to $n := p(k) \geqslant k > n_0$, więc $d(y_k,\hat{x}) < \varepsilon$ (gdyż $y_k = x_{p(k)} = x_n$). Zatem $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall k > n_0 : d(y_k,\hat{x}) < \varepsilon$, czyli $\lim y_k = \hat{x}$.

Uwaga. Z części " $\Longleftarrow$ " powyższego twierdzenia korzystaliśmy już przy badaniu ciągów określonych rekurencyjnie (przypadek "oscylujący"), rozkładając (x_n) na podciągi (x_{2n}) i (x_{2n-1}).

♣

Zadanie 5.21. (Krystian Gładych) Niech (x'_n) i (x''_n) to dwa zbieżne ciągi w przestrzeni metrycznej (X,d). Wykazać, że jeżeli $\{x'_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \{x''_n \mid n\in\mathbb{N}\} := Z$, to $\lim x'_n = \lim x''_n$ lub Z jest skończone.

Rozwiązanie. Załóżmy, że $x' := \lim x'_n$ jest różne od $x'' := \lim x''_n$. Weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x',x'') > 0$; wtedy kule $K(x',\varepsilon), K(x'',\varepsilon)$ są rozłączne, więc suma ich dopełnień daje całe X. Z definicji granicy wynika, że każde z tych dopełnień zawiera skończoną liczbę wyrazów ciągu (x_n), tzn. skończoną liczbę elementów zbioru Z. Zatem Z, jako suma dwóch zbiorów skończonych, jest skończone. ♣

Zadanie 5.22. (Krystian Gładych) Niech (x_n) to ciąg w przestrzeni metrycznej (X,d). Wykazać, że

(a) Jeżeli $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\hat{x}) = +\infty$ dla pewnego (a więc też dla każdego) $\hat{x}\in X$, to zbiór $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ jest domknięty.

(b) Jeżeli ciąg (x_n) jest zbieżny, i $\hat{x} = \lim_{n\to\infty}$, to zbiór $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\hat{x}\}$ jest domknięty.

Rozwiązanie. (a) Niech $x\in U := X\setminus\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. Z założenia $\exists n_0 : \forall n > n_0 : d(x_n,\hat{x}) > 1 + d(x,\hat{x})$, a zatem $d(x_n,x) \geqslant d(x_n,\hat{x}) - d(x,\hat{x}) > 1$ dla $n > n_0$. Stąd wynika, że jeżeli $r := \min\{1, d(x_1,x),...,d(x_{n_0},x)\}$, to $r > 0$ (bo $x\in U$), $r\leqslant 1$, oraz $\forall n\in\mathbb{N} : x_n \not\in K(x,r)$ (gdyż dla $n\leqslant n_0$ jest $d(x_n,x)\geqslant r$, a dla $n > n_0$ $d(x_n,x) > 1 \geqslant r$). Zatem $K(x,r)\subset U$, czyli U to zbiór otwarty.

(b) Niech $x\in U := X\setminus(\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\hat{x}\})$. Weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,\hat{x}) > 0$. Z definicji granicy wynika, że $\exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n > n_0 : [x_n\in K(\hat{x},\varepsilon)$, a więc $x_n\notin K(x,\varepsilon)]$ (gdyż $K(x,\varepsilon)\cap K(\hat{x},\varepsilon) = \emptyset$). Niech $r := \min\{\varepsilon, d(x_1,x),...,d(x_{n_0},x)\}$; wtedy $r > 0$ oraz $K(x,r)\subset U$. ♣

6 Liczba e, funkcja wykładnicza i logarytm

Dla $n\in\mathbb{N}$: $x\in\mathbb{R}$ oznaczamy $e_n(x) := (1+\frac{x}{n})^n$. Wówczas:

(1) $\forall x\in\mathbb{R}$ istnieje granica $e(x) := \lim_{n\to\infty} e_n(x)$

(2) $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R} : e(x_1+x_2) = e(x_1)e(x_2)$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} : e(x) > 0$ oraz $e(x) \geqslant 1 + x$

(4) funkcja $\mathbb{R} \ni x \to e(x) \in]0, \infty[$ jest rosnąca

(5) funkcja $\mathbb{R} \ni x \to e(x) \in]0, \infty[$ jest ciągła

Dowody

1. Pokażemy, iż przy ustalonym $x \in \mathbb{R}$ ciąg $(e_n(x))$ jest, począwszy od pewnego miejsca, rosnący. Otóż
$$1 + \frac{x}{n+1} > g > 0$$
dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ (mianowicie dla $n > \max\{0, -x\}$), więc z nierówności Bernoulliego dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = 1$$

2. Mamy
$$e_n(x)e_n(-x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$
a więc dla $n > \max\{0, x\}$:
$$e_n(x) \leqslant \frac{1}{e_n(-x)}$$
przy czym ciąg $\left(\frac{1}{e_n(-x)}\right)$ jest malejący ...tu fragment, którego nie mogę rozczytać... Stąd $(e_n(x))$ jest ograniczony z góry, co wraz z 1. daje fakt (1)

3. Przy ustalonych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ niech $n \in \mathbb{N}$ będzie tak duże, że dodatnie są $1 + \frac{x_1}{n}$, $1 + \frac{x_2}{n}$, $1 + \frac{x_1+x_2}{n}$ (więc dodatnie są $e_n(x_1)$, $e_n(x_2)$ i $e_n(x_1 + x_2)$). Wtedy z nierówności Bernoulliego:
$$\frac{e_n(x_1)e_n(x_2)}{e_n(x_1 + x_2)} = \left[\frac{\left(1 + \frac{x_1}{n}\right)\left(1 + \frac{x_2}{n}\right)}{1 + \frac{x_1+x_2}{n}}\right]^n = \left[1 + \frac{\frac{x_1x_2}{n^2}}{1 + \frac{x_1+x_2}{n}}\right]^n \geqslant 1 + \frac{\frac{x_1x_2}{n}}{1 + \frac{x_1+x_2}{n}}$$
$$\frac{e_n(x_1 + x_2)}{e_n(x_1)e_n(x_2)} = \left[1 - \frac{\frac{x_1x_2}{n^2}}{\left(1 + \frac{x_1}{n}\right)\left(1 + \frac{x_2}{n}\right)}\right]^n \geqslant 1 - \frac{\frac{x_1x_2}{n}}{\left(1 + \frac{x_1}{n}\right)\left(1 + \frac{x_2}{n}\right)}$$
a zatem dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy
$$1 + \frac{\frac{x_1x_2}{n}}{1 + \frac{x_1+x_2}{n}} \leqslant \frac{e_n(x_1)e_n(x_2)}{e_n(x_1 + x_2)} \leqslant \left[1 - \frac{\frac{x_1x_2}{n}}{\left(1 + \frac{x_1}{n}\right)\left(1 + \frac{x_2}{n}\right)}\right]^{-1}$$
więc
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n(x_1)e_n(x_2)}{e_n(x_1 + x_2)} = 1$$
(tw. o zachowaniu nierówności w granicy), a stąd i z faktu (1) wynika fakt (2)

4. Z nierówności Bernoulliego:
$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + x$$
dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc $e(x) \geqslant 1 + x$. Ponadto z faktu 2. $e(x)e(-x) = e(0) = 1$ i jedna z liczb $e(x)$, $e(-x)$ jest $\geqslant 1 + |x| > 0$, skąd fakt (3)

5. $x_1 < x_2 \Rightarrow e(x_2) = e(x_1)e(x_2 - x_1) > e(x_1)$, co dowodzi (4)

6. dokończyć dowód ciągłości

$$x + 1 \leqslant e(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$$

$$x \leqslant e(x) - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$$

$$|e(x) - 1| \leqslant \max\{|x|, |\frac{x}{1-x}|\}$$

Twierdzenia

(I) $e(x) = e^x$, gdzie $e \coloneqq e(1)$, tzn. $e \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828459045$. Jest to tzw. podstawa logarytmu naturalnego. Tak więc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

(II) $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geqslant 1 + x$

(III) $\forall x < 1 : e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$

Dowody

I Z punktu (2) przez indukcję dostajemy $e(x_1 + x_2 + ... + x_n) = e(x_1)...e(x_2)$, stąd w szczególności $e(nx) = e(x)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Zarazem $e(0) = 1$ i $e(x)e(-x) = 1$ z czego wynika $e(-x) = e(x)^{-1}$, więc równość $e(nx) = e(x)^n$ zachodzi dla $x \in \mathbb{Z}$. Stąd dla dowolnego $q = \frac{l}{m} \in \mathbb{Q}$, $l \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ mamy $e(q)^m = e(mq) = e(l) = e(1)^l = e^l$, czyli $e(q) = \left(e^l\right)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{l}{m}} = e^q$. Zatem funkcje $x \to e(x)$ i $x \to e^x$ pokrywają się na zbiorze $\mathbb{Q}$ i obie są rosnące, skąd są równe.

II Wynika wprost z (I) i (3)

III Z twierdzenia (II) dla $x < 1 : \frac{1}{e^x} = e^{-x} \geqslant 1 - x > 0$

Logarytm naturalny
Funkcja wykładnicza $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $\exp(x) \coloneqq e^x$ jest bijekcją, ma więc odwrotność nazywaną logarytmem naturalnym: $\log :\ ]0, \infty[\to \mathbb{R}$. Zatem dla $x \in]0, \infty[$, $y \in \mathbb{R}$:

1. $\log x = \log_e x$

2. $\log x = y \Leftrightarrow x = e^y$

3. $e^{\log x} = x$

4. $\log e^y = y$

Fakt: $\frac{x-1}{x} \leqslant \log x \leqslant x - 1$ dla $x > 0$, tzn $\frac{x}{x+1} \leqslant \log(1 + x) \leqslant x$ dla $x + 1 > 0$
Dowód Prawą stronę nierówności otrzymujemy logarytmując nierówność z faktu (3). Lewą stronę udowadniamy wykorzystując udowodnioną nierówność:

$$\log\left(\frac{1}{1+x}\right) = \log\left(1 + \frac{-x}{x+1}\right) \leqslant \frac{-x}{1+x}, \quad \frac{-x}{x+1} > -1$$

z czego wynika

$$\log(1 + x) \geqslant \frac{x}{x+1}$$

Zadanie 6.1. (Gabriela Szwed) Wykaż, że $0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{1-x}$ dla $1 - x > 0$ oraz $0 \leqslant x - \log(1 + x) \leqslant \frac{x^2}{1+x}$ dla $1 + x > 0$.

Rozwiązanie. W pierwszej nierówności $0 \leqslant e^x - 1 - x$ wynika bezpośrednio z faktu 3, $e^x - x - 1 \leqslant \frac{x^2}{1-x}$ bezpośrednio z z faktu (III). Druga nierówność wynika z $\frac{x}{x+1} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$:

$$x - \frac{x^2}{1+x} = \frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x)$$

♣

Zadanie 6.2. (Gabriela Szwed) Wykaż, że $|\log(1+x)| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|}$ dla $|x| < 1$.

Rozwiązanie. Dla $-1 < x \leqslant 0$ zachodzi

$$0 \leqslant \log(\frac{1}{1+x}) = -\log(1+x) \leqslant \frac{-x}{1+x} = \frac{|x|}{1-|x|}$$

. Dla $0 \leqslant x < 1$ zachodzi

$$0 \leqslant \log(1+x) \leqslant x \leqslant \frac{x}{1-x} = \frac{|x|}{1-|x|}$$

. ♣

Zadanie 6.3. (Gabriela Szwed) Wykaż, że funkcja $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Rozwiązanie. Dla $x_0, x \in]0,\infty[$:

$$|\log x - \log x_0| = \left|\log \frac{x}{x_0}\right| = \left|\log\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)\right| \leqslant \frac{\frac{|x-x_0|}{x_0}}{1 - \frac{|x-x_0|}{x_0}}$$

co będzie mniejsze niż ϵ, gdy $|x - x_0| \leqslant \frac{x_0\epsilon}{1+\epsilon} =: \delta = \delta(x_0, \epsilon)$. ♣

Zadanie 6.4. (Gabriela Szwed) Wykaż, że $|e^x - 1| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|}$ dla $|x| < 1$ i korzystając z tego dowodu wykaż, że funkcja $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła.

Rozwiązanie. Dla $-1 < x \leqslant 0$:

$$0 \leqslant 1 - e^x \leqslant -x = |x| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|}$$

Dla $0 \leqslant x < 1$:

$$0 \leqslant e^x - 1 \leqslant \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{|x|}{1-|x|}$$

Stąd

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0}\left|e^{x-x_0} - 1\right| \leqslant e^{x_0}\frac{|x-x_0|}{1-|x-x_0|}$$

gdy $|x - x_0| < 1$, co będzie mniejsze niż ϵ, gdy $|x - x_0| \leqslant \frac{\epsilon e^{-x_0}}{1+\epsilon^{-x}} =: \delta = \delta(x_0, \epsilon)$. ♣

Zadanie 6.5. (Gabriela Szwed) Dane są dwa ciągi liczbowe (a_n), (b_n). Wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz istnieje granica $g \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n b_n$, to $\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^g = e^{\lim a_n b_n}$.

Rozwiązanie. Korzystając z nierówności udowodnionej w zadaniu pierwszym:

$$\left|\log(1+a_n)^{b_n} - a_n b_n\right| = |\log(1+a_n) - a_n| \cdot |b_n| \leqslant \left|\frac{a_n}{1+a_n}\right| |a_n b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} \log(1+a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = g$$

co wraz z ciągłością exp daje tezę.
Przykłady:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+7}{3n+5}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{3n+5}\right)^{2n+3} = e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+an+b}{n^2+cn+d}\right)^n = e^{a-c}$$

♣

Zadanie 6.6. (Gabriela Szwed) Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \log a$ dla $a > 0$.

Rozwiązanie. Weźmy $x = \frac{\log a}{n}$ w nierówności $x \leqslant e^x - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$ wtedy dla dostatecznie dużych n zachodzi:

$$\frac{\log a}{n} \leqslant \sqrt[n]{a} - 1 \leqslant \frac{\frac{\log a}{n}}{1-\frac{\log a}{n}}$$

skąd

$$\log a \leqslant n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) \leqslant \frac{\log a}{1-\frac{\log a}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log a$$

co udowadnia tezę. ♣

7 Szeregi liczbowe

Zadanie 7.1. (Aleksandra Oszmian) Zbadać zbieżność ciągu o wyrazach:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + ... + \sqrt{\frac{n+1}{n}} - n$$

Rozwiązanie. $a_{n+1} - a_n = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + ... + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - n - 1 - \sqrt{\frac{2}{1}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - ... - \sqrt{\frac{n+1}{n}} + n = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - 1 = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = \frac{1}{n+1+\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

$a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_n - a_{n-1} + ... + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 + a_1 = \sum_{k=1}^{n+1} b_k$,

gdzie $b_n = a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n+\sqrt{n(n+1)}}$.

Szereg $\sum_{k=1}^{n+1} b_k$ jest rozbieżny na mocy drugiego kryterium porównawczego z szeregiem harmonicznym.

Ciąg (a_n) jest ciągeim sum częściowych o wyrazach (b_n), a zatem jest rozbieżny. ♣

Zadanie 7.2. (Aleksandra Oszmian) Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-n^2)^n}{(2n)!2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{1+\sqrt[n]{5}})^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\frac{n+1}{\sqrt{n^2+100}} - 1]$

Rozwiązanie. a) $x_n = \frac{(1-n^2)^n}{(2n)!2^n} = \frac{(-1)^n(n^2-1)^n}{(2n)!2^n} = (-1)^n|x_n|$

$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{((n+1)^2-1)^{n+1}(2n)!2^n}{(2(n+1))!2^{n+1}(n^2-1)^n} = \frac{(n^2+2n+1-1)^{n+1}}{4(n+1)(2n+1)(n^2-1)^n} = (\frac{n^2+2n}{n^2-1})^n \frac{n^2+2n}{4(n+1)(2n+1)} = (1+\frac{2n+1}{n^2-1})^n \frac{n^2+2n}{4(n+1)(2n+1)}$, gdzie pierwszy czynnik zbiega do e^2, a drugi do $\frac{1}{4}$ przy $n \to \infty$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{e^2}{4} > 1$. Zatem badany szereg jest rozbieżny - nie spełnia warunku koniecznego.

b) $y_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+100}} - 1 = \frac{n+1\sqrt{n^2+100}}{\sqrt{n^2+100}} = \frac{n^2+2n+1-n^2-100}{\sqrt{n^2+100}(n+1+\sqrt{n^2+100})} = \frac{2n-99}{\sqrt{n^2+100}(n+1-\sqrt{n^2+100})}$

Dla $n \geqslant 50$ (y_n) jest dodatnie, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Licznik jest rzędu 1 a mianownik rzędu 2, zatem od pewnego momentu y_n jest malejący, a więc szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza.

c) $z_n = (\frac{2}{1+\sqrt[n]{5}})^n = (\frac{1+\sqrt[n]{5}+1-\sqrt[n]{5}}{1+\sqrt[n]{5}})^n = (1+\frac{1-\sqrt[n]{5}}{1+\sqrt[n]{5}})^n$
Oznaczamy $c_n = \frac{1-\sqrt[n]{5}}{1+\sqrt[n]{5}}$.
Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(1-\sqrt[n]{5})}{1+\sqrt[n]{5}} = -\dfrac{\log(5)}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \exp(-\dfrac{\log(5)}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \neq 0$.
Szereg jest rozbieżny, gdyż nie spełnia warunku koniecznego. ♣

Zadanie 7.3. (Aleksandra Oszmian) Udowodnić kryterium Jermakowa o zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.
Niech (u_n) będzie ciągiem malejącym takim, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n u_{2^n}}{u_n} = L.$$

Jeśli $L < 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny, a jeśli $L > 1$, to szereg ten jest rozbieżny.

Rozwiązanie. Załóżmy najpierw, że $L < 1$. Wybierzmy dowolne K spełniające warunek $L < K < 1$. Wówczas prawie wszystkie wyrazy ciągu $\frac{2^n u_{2^n}}{u_n}$ spełniają $\frac{2^n u_{2^n}}{u_n} < K$.
Ponadto $u_n > 0$, więc $2^n u_{2^n} < K u_n \iff u_{2^n} < \frac{K}{2^n} u_n$.
Ciąg u_n jest malejący i ma dodatnie wyrazy, zatem jest ograniczony.

$$\sum_{k=2^N}^{2^{n-1}} u_k \leqslant \sum_{k=2^N}^{n} 2^l u_{2^l} - K \sum_{k=2^N}^{2^n-1} u_k < K(\sum_{l=N}^{n} u_l - \sum_{k=2^N}^{2^n-1} u_k) = K(\sum_{l=N}^{2^N-1} u_l - \sum_{k=n+1}^{2^n-1} u_k) \leqslant K \sum_{l=N}^{2^N-1} u_l$$

Otrzymaliśmy:

$$(1-K)\sum_{k=2^N}^{2^n-1} u_k < K \sum_{k=N}^{2^N-1} u_k$$
$$(1-K)\sum_{k=2^N}^{2^n-1} u_k < K \sum_{l=N}^{2^N-1} u_l \qquad /:(1-K)$$
$$\sum_{k=2^N}^{2^n-1} u_k < \frac{K}{1-K} \sum_{l=N}^{2^N-1} u_l$$
$$S_{2^n-1} - S_{2^N-1} < \tfrac{K}{1-K}(S_{2^N-1} - S_{N-1})$$
$$S_{2^n-1} < \tfrac{K}{1-K}(S_{2^N-1} - S_{N-1}) + S_{2^N-1},$$

gdzie pierwszy składnik po prawej stronie nierówności jest stałą.

S_k jest rosnącym ciągiem mającym ograniczony podciąg. Ponieważ dla każdego k istnieje n takie, ze $k < 2^n - 1$, wnioskujemy, że S_n jest ograniczony, a więc zbieżny.

Rozważmy teraz przypadek $L > 1$. Wówczas dla prawie wszystkich n (tzn. $n > N$):

$$\tfrac{2^n u_{2^n}}{u_n} > 1 \iff 2^n u_{2^n} > u_n$$

$$\sum_{k=2^N+1}^{2^n} \geqslant \sum_{l=N+1}^{n} 2^{l-1} u_{2^l} > \sum_{l=N+1}^{n} u_l \qquad /+\sum_{i=n+1}^{2^N} u_l$$
$$\sum_{k=n+1}^{2^n} u_k > \sum_{l=N+1}^{2^N} u_l \text{ - stała}$$

Definiujemy ciąg liczb naturalnych:

$$\begin{aligned} m_1 &= N \\ m_2 &= 2^n \\ m_3 &= 2^{m_2} \\ &\vdots \\ m_k &= 2^{m_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\sum_{l=N+1}^{m_k} u_l = \sum_{l=m_1+1}^{m_2} u_l + \sum_{l=m_2+1}^{m_3} u_l + ... + \sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} u_l > M + M + ... + M = (k-1)M$$
$$S_{m_k} - S_N > (k-1)M$$
$$S_{m_k} > S_N + (k-1)M \to \infty, \text{ gdy } k \to \infty$$

Otrzymalismy zmierzający do ∞ podciąg ciągu (S_n). Zatem S_n nie jest zbieżny. ♣

Zadanie 7.4. (Aleksandra Oszmian) Zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot ... \cdot (4n-3)}{(4n-2)!!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$

Rozwiązanie. a) Wiadomo, że $\log x < x$, więc możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \log n &< n \qquad / \sqrt[n]{...} \\ \sqrt[n]{\log n} &< \sqrt[n]{n} \qquad /...^{-1} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}} &> \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \end{aligned}$$

Prawa strona nierówności jest zbieżna do 1 przy $n \to \infty$. Zatem Dany szereg nie spełania warunku koniecznego zbieżności szergów - jest rozbieżny.

b) Skorzystamy z kryterium d'Alemberta.
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot ... \cdot (4n-3)(4n+1)(4n-2)!!}{(4n+2)!! 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot ... \cdot (4n-3)} = \frac{4n+1}{4n(4n+2)} \to 0$ przy $n \to \infty$.
Zatem badany szereg na mocy kryterium d'Alemberta jest zbieżny.

c) Wyrażenie $\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ przekształcamy w następujący sposób:
$\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \frac{n-1-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})} = \frac{n-1-n-1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})} = \frac{-2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}$

Jest to szereg o wyrazach ujemnych, zbiezny na mocy drugiego kryterium porównawczego z szeregiem o wyrazach postaci $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. ♣

Zadanie 7.5. (Aleksandra Oszmian) Wykazać, że jeśli szeregi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są zbieżne oraz $a_n > 0$, $b_n > 0$, to zbieżny jest też szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Rozwiązanie. Skorzystamy z nierówności Schwarza:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 \sum_{k=1}^{n}(b_k)^2$$

Oznaczamy $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. Jest to suma częściowa interesującego nas szeregu. Niech także A_n, B_n oznaczają sumy częściowe szeregów o wyrazach $(a_n)^2$, $(b_n)^2$ odpowiednio. Na mocy nierówności Schwarza mamy:

$$S_n^2 \leqslant A_n B_n$$

S_n jest ciągiem rosnącym o wyrazach dodatnich. Podobnie A_n i B_n. Zatem powyższą nierówność można spierwiastkować:

$$S_n \leqslant \sqrt{A_n B_n} \leqslant \sqrt{AB},$$

gdzie $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, $B = \lim_{n\to\infty} B_n$.
S_n jest rosnący i ograniczony, a więc zbieżny. ♣

8 Topologia przestrzeni metrycznej

Zadanie 8.1. (Krystian Gładych) Pokazać, że zbiór $X := \left\{\frac{mn}{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ jest domknięty.

Rozwiązanie. Niech $x_k \in X$ i niech ciąg (x_k) jest zbieżny; można założyć, że $x_k = \frac{m_k n_k}{m_k + n_k}$, gdzie $m_k \leqslant n_k$. Wtedy $x_k \geqslant \frac{1}{2} m_k$ (gdyż $2m_k n_k \geqslant m_k(m_k + n_k)$), a zatem ciąg (m_k) jest, tak jak ciąg (x_k), ograniczony z góry. Można więc z ciągu (x_n) wybrać podciąg (zbieżny do tej samej granicy) dla którego $m_k = m$ jest stałe. Zastąpmy (x_k) tym podciągiem (dla uproszczenia notacji). Zatem ciąg $x_k = \frac{mn_k}{m+n_k} = \frac{m}{1+\frac{m}{n_k}}$ jest zbieżny, co oznacza, że ciąg $(\frac{m}{n_k})$ też jest zbieżny. Stąd wynika, że albo $\frac{m}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ (i wtedy $\lim x_k = m = \frac{2m\cdot 2m}{2m+2m} \in X$), albo $\frac{m}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{m}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ (i wtedy $\lim x_k = \frac{m}{1+\frac{m}{n}} = \frac{mn}{n+m} \in X$). Zatem w obu przypadkach $\lim x_k \in X$, czyli zbiór X jest domknięty. ♣

Zadanie 8.2. (Krystian Gładych) Niech (X, d) to przestrzeń metryczna. Pokazać, że jeżeli zbiór $\mathcal{O} \subset X$ jest otwarty, to dla każdego $A \subset X$ mamy

$$(1)\ \mathcal{O} \cap \overline{A} \subset \overline{\mathcal{O} \cap A};\ (2)\ \overline{\mathcal{O} \cap \overline{A}} = \overline{\mathcal{O} \cap A}.$$

Rozwiązanie. **Dowód (1): I metoda.** Zawsze mamy $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$, gdyż $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ daje $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{A \setminus B} \cup \overline{B}$, skąd $\overline{A} \subset \overline{A \setminus B} \cup \overline{B}$, czyli $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$. Stosując ten fakt, dostajemy:

$$\mathcal{O} \cap \overline{A} = \overline{A} \setminus (X \setminus \mathcal{O}) = \overline{A} \setminus \overline{(X \setminus \mathcal{O})} \subset \overline{A \setminus (X \setminus \mathcal{O})} = \overline{A \cap \mathcal{O}}$$

Druga równość wynika z tego, że zbiór $X \setminus \mathcal{O}$ jest domknięty.

II metoda. Mamy:

$$x \notin \overline{\mathcal{O} \cap A} \Rightarrow \exists V_x \ni x \text{ (otwarty) } : V_x \cap (\mathcal{O} \cap A) = \emptyset \Rightarrow$$
$$A \subset X \setminus (V_x \cap \mathcal{O}) \overset{(\star)}{\Rightarrow} \overline{A} \subset X \setminus (V_x \cap \mathcal{O}) \Rightarrow$$
$$V_x \cap \mathcal{O} \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow x \notin \mathcal{O} \cap \overline{A}$$

Implikacja $(\star)$ jest prawdziwa, ponieważ zbiór $X \setminus (V_x \cap \mathcal{O})$ jest domknięty (gdyż zbiór $V_x \cap \mathcal{O}$ jest otwarty).

III metoda. Mamy:

$$x \in \mathcal{O} \cap \overline{A} \Rightarrow x = \lim x_n, \text{ gdzie } x_n \in A \text{ i } x_n \in \mathcal{O} \text{ dla prawie wszystkich } n$$
$$\Rightarrow x_n \in \mathcal{O} \cap A \text{ dla prawie wszystkich } n \Rightarrow x = \lim x_n \in \overline{\mathcal{O} \cap A}$$

Dowód (2): I metoda.

$$\mathcal{O} \cap \overline{A} \supset \mathcal{O} \cap A \Rightarrow \overline{\mathcal{O} \cap \overline{A}} \supset \overline{\mathcal{O} \cap A}$$

$$\mathcal{O} \cap \overline{A} \overset{(1)}{\subset} \overline{\mathcal{O} \cap A} \Rightarrow \overline{\mathcal{O} \cap \overline{A}} = \overline{\mathcal{O} \cap A} \text{ (gdyż } \overline{\overline{B}} = \overline{B})$$

II metoda.

$$x \notin \overline{\mathcal{O} \cap \overline{A}} \Leftrightarrow \exists V_x \ni x \text{ (otwarty) } : x \in V_x, V_x \cap \big(\mathcal{O} \cap \overline{A}\big) = \emptyset, \text{ tzn. } \overline{A} \subset X \setminus (V_x \cap \mathcal{O})$$
$$\Leftrightarrow A \subset X \setminus (V_x \cap \mathcal{O}) \text{ (bo zbiór } X \setminus (V_x \cap \mathcal{O}) \text{ jest domknięty)} \Leftrightarrow x \notin \overline{\mathcal{O} \cap A}$$

♣

Zadanie 8.3. (Krystian Gładych) Wykazać, że jeżeli $\mathcal{O} \cap \overline{A} \subset \overline{\mathcal{O} \cap A}$ dla każdego $A \subset X$, to zbiór $\mathcal{O}$ jest otwarty.

Rozwiązanie. Weźmy $A := X \setminus \mathcal{O}$; wtedy $\mathcal{O} \cap \overline{A} = \mathcal{O} \setminus \operatorname{Int} \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \cap A = \emptyset$, więc $\mathcal{O} \subset \operatorname{Int} \mathcal{O}$. ♣

Zadanie 8.4. (Krystian Gładych) Wykazać, że jeżeli zbiór $F \subset X$ jest domknięty, to $\operatorname{Int}(F \cup A) \subset F \cup \operatorname{Int} A$ dla $A \subset X$.

Rozwiązanie. I metoda. Zastosować zadanie 8.2, punkt (1), biorąc $\mathcal{O} := X \setminus F$.
II metoda. Mamy:

$$x \in (\operatorname{Int}(F \cup A)) \setminus F \Rightarrow \exists V_x', V_x'' \ni x \text{ (otwarte)} : V_x' \subset F \cup A, V_x'' \subset X \setminus F.$$

Wtedy $x \in V_x' \cap V_x'' \subset A$, a więc $x \in \operatorname{Int} A$.

♣

8.1 Zwartość

Zadanie 8.5. (Hubert Andrzejewski) Wykazać, że zbiorem wartości funkcji $f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ jest zwarty odcinek, wyznaczyć ten odcinek.

Dowód. Obliczmy f_x', f_y':

$$f_x' = \frac{1-2xy-x^2}{(x^2+1)^2(y^2+1)}; f_y' = \frac{1-2xy-y^2}{(x^2+1)(y^2+1)^2}$$

Liczniki w punkcie krytycznym muszą się zerować, a zatem:

$$x^2 = 1 - 2xy = y^2 \to x = y$$

Wstawiając x lub y do dowolnego z powyższych równań i rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe ze względu na x lub y, dostajemy $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, a wartość funkcji wyjściowej w tym punkcie wynosi:

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Zauważmy, że dla $|x| > 2$:

$$|\frac{x}{x^2+1}| \leqslant |\frac{x}{x^2}| \leqslant \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{5}$$

Więc:

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{0,5}{y^2+1} + \frac{0,2y}{y^{2+1}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0,6$$

Analogicznie dla $|y| < 2$, a zatem poza zwartym zbiorem $K := \{(x,y) : |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2\}$ mamy odcinek $|f(x,y)| \leqslant 0,6$ ♣

8.2 Spójność

Zadanie 8.6. (Krzysztof Wolicki) Niech $a_1, a_2, a_3 > 0$. Wykaż, że

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x_1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x_2)^2}{(a_2)^2} = 1 + \frac{(x_3)^2}{(a_3)^2} \right\}$$

jest spójny.

Dowód:. Odwzorowanie $\phi : \mathbb{R}^2 \to S$:

$$\phi(u, v) = (a_1\sqrt{1+u^2}\cos v, a_2\sqrt{1+u^2}\sin v, a_3 u)$$

to parametryzacja powierzchni S. ϕ jest ciągłe (ciągłe są współrzędne ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) i injektywne. Dla $x \in S : u := \frac{x_3}{a_3}$, wtedy

$$\left(\frac{x_1}{a_1\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2\sqrt{1+u^2}} \right)^2 = 1$$

a więc istnieje takie $v \in \mathbb{R}$ że $\frac{x_1}{a_1\sqrt{1+u^2}} = \cos v, \frac{x_2}{a_2\sqrt{1+u^2}} = \sin v$. Zatem S jest spójny jako obraz zbioru spójnego względem odwzorowania ciągłego. ♣

Zadanie 8.7. (Krzysztof Wolicki) Niech $a_1, a_2, a_3 > 0$. Wykaż, że

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{(x_1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x_2)^2}{(a_2)^2} = \frac{(x_3)^2}{(a_3)^2} \right\}$$

jest niespójny.

Dowód:. *I metoda* Jeśli $x \in S$, to $\frac{(x_3)^2}{(a_3)^2} \geqslant 1$, więc $x_3 \neq 0$. Zatem $S = S_1 \cup S_2$, gdzie $S_k := S \cap A_k, A_1 := \mathbb{R}^2 \times]-\infty, 0], A_2 := \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[$. Przy tym S_1, S_2 są niepuste (np. $(0, 0, a_3) \in A_2$ i $(0, 0, -a_3) \in A_1$) i *rozgraniczone* (gdyż $S_1 \subset A_1, S_2 \subset A_2$, zaś A_1 i A_2 są rozgraniczone: $\bar{A_1} \cap A_2 = \emptyset = A_1 \cap \bar{A_2}$ gdyż np. $\bar{A_1} = \mathbb{R}^2 \times]-\infty, 0]$ jest rozłączne z A_2).
II metoda Funkcja $f : S \to \mathbb{R}, f(x) := x_3$, jest ciągła (gdyż ciągłe jest rzutowanie $\mathbb{R}^3$ na poszczególne osie). Liczby a_3 i $-a_3$ są wartościami f, a liczba 0 - nie jest. Zatem $f(S) \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem niespójnym (zauważamy, że $f(S) =]-\infty, -a_3] \cup [a_3, \infty[$), a więc S jest niespójny (bo ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny). ♣

Zadanie 8.8. (Krzysztof Wolicki) Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ zbiór $S := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = p \right\}$ jest spójny?

Rozwiązanie:. Dla $p = 0$ S jest sumą mnogościową trzech płaszczyzn (płaszczyzny $x_1 = 0$, pł. $x_2 = 0$, pł. $x_3 = 0$) mających wspólny punkt $(0, 0, 0)$, zatem jest zbiorem łukowo spójnym (a tym bardziej spójnym). Dla $p \neq 0$ mamy rozkłąd $S = S_1 \cup S_2, S_k := S \cap A_k, A_k :=$ ... itd (jak w zadaniu 8.7), a więc S jest niespójny. ♣

Zadanie 8.9 (*). (Krzysztof Wolicki) Zbiór $S := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 1 \right\}$ ma cztery spójne składowe.

Dowód:. Jasne, że $S = S_{+++} \cup S_{+--} \cup S_{-+-} \cup S_{--+}$, gdzie $S_{+++} := \{x \in S : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$, itd. Przy tym każde dwa składniki tej sumy są rozgraniczone (patrz zadaniu 8.7), więc wystarczy wykazać, że są one spójne. Otóż mamy np. $S_{+++} = \phi\left([0, \infty[\times [0, \infty[\right)$, gdzie $\phi\,(u, v) := \left(u, v, \frac{1}{uv} \right)$, a więc ϕ jest ciągłe i zatem S_{+++} jest spójny. ♣

Zadanie 8.10. (Krzysztof Wolicki) Sfera $S^{n-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \right\}$ jest dla $n \geqslant 2$ zb. łukowo spójnym, a więc spójnym.

Dowód:. Niech $N(x) := d(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, zatem $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Dla $x, y \in S^{n-1}$, takich, że $x + y \neq 0$ (nieantypodycznych) weźmy $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) := ((1-t)\,x + ty) \cdot \frac{1}{N\,((1-t)\,x + ty)}$$

Jest to ciągła krzywa łącząca x i y. Z kolei punkty x i $-x$ (antypodyczne) można połączyć łukiem, łącząc najpierw x z ustalonym punktem y t.że $y \neq x, y \neq -x$, a nast. łącząc y z $-x$. ♣

Zadanie 8.11 (Lemat)**.** (Krzysztof Wolicki) Niech S - podzbiór spójny przestrzeni metr. X. Jeśli $S \subset A_1 \cup A_2$, gdzie $A_1, A_2 \subset X$ są rozgraniczone (tzn. $\bar{A_1} \cup A_2 = \emptyset = A_1 \cup \bar{A_2}$), to $S \subset A_1$ lub $S \subset A_2$.

Dowód:. $S = S_1 \cup S_2$, gdzie $S_i := S \cap A_i$, przy czym S_1 i S_2 jako podzbiory zbiorów rozgraniczonych A_1 i A_2, także są rozgraniczone (monotoniczność operacji domknięcia). Zatem $S_1 = \emptyset$ lub $S_2 = \emptyset$ (ze spójności S) i w pierwszym przypadku $S = S_2 = S \cap A_2$, czyli $S \subset A_2$ i w drugim przypadku analogicznie $S \subset A_1$. ♣

Zadanie 8.12. (Krzysztof Wolicki) Jeśli $S_1, S_2 \subset X$ są spójne i nierozgraniczone, to $S_1 \cup S_2$ też jest spójny.

Dowód:. Niech $S_1 \cup S_2 = A_1 \cup A_2$, gdzie A_1 i A_2 - rozgraniczone. Z 8.11 wynika więc, że ($S_1 \subset A_1$ lub $S_1 \subset A_2$) oraz ($S_2 \subset A_1$ lub $S_2 \subset A_2$). Przy tym nie może być ($S_1 \subset A_1,\ S_2 \subset A_2$) ani ($S_2 \subset A_1,\ S_1 \subset A_2$), gdyż byłoby to sprzeczne z nierozgraniczonością S_1 i S_2. Mamy więc np. $S_1, S_2 \subset A_1$ i wtedy $A_1 \cup A_2 = S_1 \cup S_2 \subset A_1$, czyli $A_2 \subset A_1$, skąd $\emptyset = \bar{A_1} \cap A_2 \supset \bar{A_2} \cap A_2 = A_2$ ♣

Zadanie 8.13. (Krzysztof Wolicki) Jeśli $A, S \subset X$ t.że $S \subset A \subset \bar{S}$, przy czym S spójny, to A spójny. W szczególności dokmnięcie zbioru spójnego jest zb. spójnym. (Oczywiście Int$S$ nie musi być spójne!)

Dowód:. Jeśli $A = A_1 \cup A_2$, gdzie A_1, A_2 - rozgraniczone, to z lematu 8.11 mamy $S \subset A_1$ lub $S \subset A_2$. Niech np. $S \subset A_1$, wtedy $S \subset A_1 \subset A \subset \bar{S}$, skąd $\bar{A_1} = \bar{S}$. Stąd $A_2 = \bar{S} \cap A_2 = \bar{A_1} \cap A_2 = \emptyset$ z warunku rozgraniczenia. ♣

Zadanie 8.14. (Krzysztof Wolicki) Jeśli $S \subset \mathbb{R}^2$, przy czym dopełnienie $\mathbb{R}^2 \setminus S$ jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym, to S jest zbiorem (łukowo) spójnym.

Dowód:. Niech $x, y \in S, x \neq y$. Istnieje co najwyżej przeliczalna liczba punktów p symetralnej odcinka $[x, y]$, takich że łamana $[x, p] \cup [p, y]$ zawiera element z $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Można więc wybrać takie $p \in \mathbb{R}^2$, dla którego $[x, p] \cup [p, y]$ zawiera się w S. ♣

Zadanie 8.15. (Krzysztof Wolicki) Jeśli $S \subset \mathbb{R}^3$ jest zbiorem takim, że $\mathbb{R}^3 \setminus S$ jest co najwyżej przeliczalną sumą prostych, to S jest zbiorem łukowo spójnym.

Dowód:. Niech π - płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$, przechodząca przez zadane punkty $x, y \in S (x \neq y)$ na której nie leży żadna z prostych $L \subset \mathbb{R}^3 \setminus S$. (Taka płaszcz. π istnieje, gdyż każdej prostej $L \subset \mathbb{R}^3 \setminus S$ odpowiada co najwyżej jedna płaszczyzna zawierająca $L \cup \{x, y\}$; jest więc $\leqslant$ przeliczalna mnogość "niedopuszczalnych" płaszczyzn). Na π, dzięki 8.2, możemy znaleźć łamaną $[x, p] \cup [p, y]$, zawartą w $S \cap \pi$. ♣

Zadanie 8.16. (Krzysztof Wolicki) Niech $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & , \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

Wtedy wykres f: $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ jest spójnym podzbiorem $\mathbb{R}^2$. (Zatem spójność wykresu nie implikuje ciągłości funkcji!)

Dowód:. $\Gamma(f) = S_- \cup \{(0, 0)\} \cup S_+$, gdzie $S_- := \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : x < 0\right\}, S_+ := \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : x > 0\right\}$. Zbiory S_-, S_+ są spójne (gdyż S_- jest obrazem $]-\infty, 0[$ przy odwzorowaniu ciągłym $]-\infty, 0[\ni x \mapsto (x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2$; analogicznie z S_+). Spójny jest także 1-elementowy zbiór $\{(0, 0)\}$. Jeżeli więc pokażemy, że punkt $(0, 0)$ należy do domknięcia każdego ze zbiorów S_- i S_+, to z 8.12 wyniknie spójność $S_- \cup \{(0,0)\}$, a w konsekwencji także spójność $(S_- \cup \{(0,0)\}) \cup S_+ = \Gamma(f)$. Otóż

$$(0,0) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\pi}, \sin(n\pi)\right) \in \bar{S}_+$$
$$(0,0) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n\pi}, \sin(-n\pi)\right) \in \bar{S}_-$$

zatem $(S_- \cup \{(0,0)\}) \cup S_+$ spójny. ♣

9 Ciągłość

Zadanie 9.1. (Krzysztof Wolicki) Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{, gdy } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{, gdy } x = 0 \end{cases}$$

jest "cząstkowo" ciągła, lecz jest nieciągła w $\hat{x} := (0,0)$.

Dowód:. $f(t,\alpha) := \dfrac{\alpha t}{\alpha^2 + t^2}$ są ciągłę dla ustalonego $\alpha \neq 0$. Z kolei $f(t,0) = f(0,t) = 0$ też jest ciągła. Nieciągłość f w $\hat{x}$:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

mimo, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0)$. ♣

Zadanie 9.2. (Krzysztof Wolicki) Jeśli $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest cząstkowo ciągła i monotoniczna na każdej prostej "pionowej" $\{\alpha\} \times \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$, to jest ciągła.

Dowód:. Dla zadanych $x_0 \in \mathbb{R}^2$ i $\varepsilon > 0$: Istnieje pionowy odcinek $[x_-, x_+]$ o środku x_0 taki, że $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ dla $x \in [x_-, x_+]$, w szczególności dla $x = x_\pm$ (ciągłość na prostych pionowych). Z kolei (ciągłość na prostych poziomych) istnieją poziome odcinki $[a_\pm, b_\pm]$ o środkach $x_\pm$ i jednakowej długości, na których $|f(x) - f(x_\pm)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, w konsekwencji $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Jeśli więc x należy do prostokąta $a_+ b_+ b_- a_-$, to $f(x)$ zawiera się pomiędzy wartościami f w rzutach x na odcinki $[a_\pm, b_\pm]$ (monotoniczność f), czyli $f(x) \in [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$. (rysunek) ♣

Zadanie 9.3. (Krzysztof Wolicki) Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geqslant 2$, dana wzorem

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \cdots (x_{n-1} + x_n)} & \text{, gdy } \forall i : x_i > 0 \\ 0 & \text{, gdy } \exists i \in (1, \ldots, n) : x_i \leqslant 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Dowód:. Podzbiory $X_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i : x_i > 0\}$, $X_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists i : x_i < 0\}$ są otwarte w $\mathbb{R}^n$ (skończone przecięcia i dowolne sumy zb. otwartych są otwarte) i f jest ciągła na każdym z nich (na X_1 f jest ilorazem ciągłych funkcji dodatnich i na X_2 $f = 0$). Wystarczy więc wykazać ciągłość f w punkach zbioru $F := \mathbb{R}^n \setminus (X_1 \cup X_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i : x_i \geqslant 0 \text{ oraz } \exists k : x_k = 0\}$. Otóż dla $y \in X_1$ oraz $j \in (1, \ldots, n)$ mamy

$$0 < f(y) = y_j \cdot \frac{y_1}{y_1 + y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_{j-1}}{y_{j-1} + y_j} \cdot \frac{y_{j+1}}{y_j + y_{j+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{y_n}{y_{n-1} + y_n} < y_j$$

a zatem $|f(y)| \leqslant \min\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$ dla $\forall y \in \mathbb{R}^n$ (dla y spoza X_1 mamy bowiem $f(y) = 0$). Stąd już natychmiast wynika ciągłość f w punkcie $x \in F$ (wtedy $f(x) = 0$ oraz $\exists k : x_k = 0$). ♣

Zadanie 9.4. (Krzysztof Wolicki) Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \arctan(\operatorname{tg} x_1 - x_2) & , \text{gdy } |x_1| < \frac{\pi}{2} \\ x_1 & , \text{gdy } |x_1| \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

jest ciągła.

Dowód:. Gdy $x \in \mathbb{R}^2$ ma współrzędną x_1 różną od $\pm\frac{\pi}{2}$, wtedy ciągłość f w x jest oczywista. Gdy z kolei np. $x_1 = \frac{\pi}{2}$, wtedy ciągłość f w punkcie x wynika z otwartości zbioru

$$f^{-1}\left(\left]\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right[\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \arctan\left(x_2 + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right) < x_1 < \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right\} \text{ dla } 0 < \varepsilon < \pi.$$

♣

Zadanie 9.5. (Krzysztof Wolicki) Niech $X := [a, b[$ (może być $b = +\infty$) oraz $f : X \to X$ - ciągła surjekcja. Wtedy f ma punkt stały.

Dowód:. Niech $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = a$. Dla $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := f(x) - x$ (ciągła!) jest wtedy $\varphi(a) = f(a) - a \geqslant 0$, $\varphi(x_0) = a - x_0 \leqslant 0$, skąd (własność Darboux) teza. ♣

Zadanie 9.6. (Krzysztof Wolicki) Jeśli $f : [0, 1] \to [0, 1]$ jest ciągła, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ oraz $f \circ \ldots \circ f =: f^n = \mathrm{id}_{[0,1]}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$.

Dowód *(ad abs.)*:. Niech $f(x_0) \neq x_0$. Weźmy $x_1 := \sup\{x \in [0, x_0] : f(x) = x\}$, $x_2 := \inf\{x \in [x_0, 1] : f(x) = x\}$. Wtedy $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$ (ciągłość f) oraz (z własności Darboux) $f(x) - x$ ma stały znak na $]x_1, x_2[$ i niech np. $f(x_0) > x_0$. Ponadto skoro f jest rosnąca (gdyż $f^n = \mathrm{id}$ daje bijecktywność f, a ciągła funkcja injektywna na $[0, 1]$ musi być monotoniczna), to $f([x_1, x_2]) \subset [x_1, x_2]$. Zatem $f^k(x_0) \in [x_1, x_2]$ oraz $x_0 < f(x_0) \leqslant f^2(x_0) \leqslant \ldots \leqslant f^n(x_0) = x_0$, skąd sprzeczność! ♣

10 Rachunek różniczkowy

Zadanie 10.1. (Krystian Gładych) Rozwiązać równania:

(a) $y' = \frac{x-2y+5}{2x-y+4}$,

(b) $\left(y^2 - 6x\right) y' + 2y = 0$

Rozwiązanie. a) Wprowadzamy zmienne

$$\xi = x + a, \eta = y + b$$

i szukamy takich wartości a oraz b, dla których podane równanie jest jednorodne. Mamy:

$$(\eta - b)' = \frac{(\xi - a) - 2(\eta - b) + 5}{2(\xi - a) - (\eta - b) + 4},$$
$$\eta' = \frac{\xi - 2\eta + (2b + 5 - a)}{2\xi - \eta + (b - 2a + 4)}.$$

Równanie ma być jednorodne, czyli

$$2b + 5 - a = 0,$$
$$b - 2a + 4 = 0.$$

Stąd wynika, że

$$a = 1, b = -2$$

oraz

$$\xi = x + 1, \eta = y - 2.$$

Zmienne ξ, η spełniają równanie

$$\eta' = \frac{\xi - 2\eta}{2\xi - \eta} = \frac{1-2u}{2-u},$$

gdzie $u = \frac{\eta}{\xi}$. Mamy $\eta = u\xi$, czyli $\eta' = u'\xi + u$, ponieważ $\xi' = \frac{d\xi}{dx} = \frac{d(x+1)}{dx} = 1$. Stąd wynika, że

$$u'\xi = \frac{1-2u}{2-u},$$
$$u'\xi = \frac{1-2u}{2-u} - u = \frac{1-4u+u^2}{2-u},$$
$$\frac{du}{1-4u+u^2}(2-u) = \frac{d\xi}{\xi}.$$

Całkując obie strony ostatniego równania, otrzymujemy

$$\log|\xi| = \int \frac{(2-u)du}{u^2-4u+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{2u-4}{u^2-4u+1}du = -\frac{1}{2}\log\left|u^2-4u+1\right| + C,$$
$$|\xi| = \frac{1}{\sqrt{D\,|u^2-4u+1|}},$$

ponieważ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$. Stąd wynika, że

$$\xi^2 = \frac{A}{|u^2-uu+1|},$$

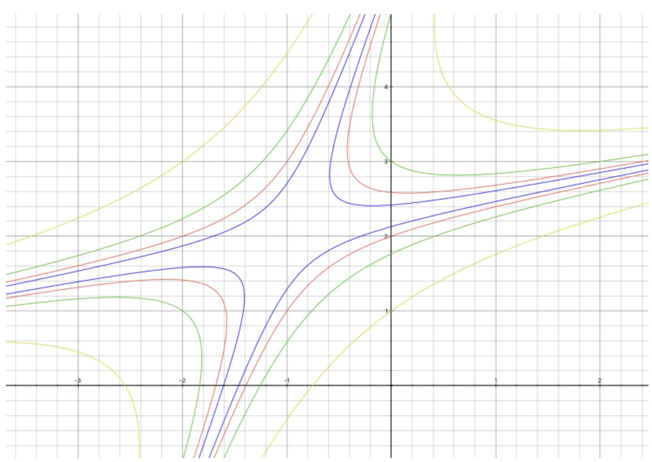
czyli

$$(x+1)^2 = \frac{A}{\left|\left(\frac{y-2}{x+1}\right)^2 - 4\left(\frac{y-2}{x+1}\right) + 1\right|} = \frac{A(x+1)^2}{|\,(y-2)^2 - 4(y-2)(x+1) + (x+1)^2)},$$
$$A = \left|y^2 - 4y + 4 - 4xy + 8x - 4y + 8 + x^2 + 2x + 1\right|,$$
$$A = \left|y^2 + x^2 - 4xy - 8y + 10x + 13\right|.$$

Równanie

$$A = \left|y^2 + x^2 - 4xy - 8y + 10x + 13\right| \tag{4}$$

to rozwiązanie równania (a) w postaci uwikłanej.



Rysunek 5: Rozwiązania równania (4) dla pewnych wartości A.

b) Przekształcamy równanie:

$$\left(y^2 - 6x\right) y' + 2y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{y^2 - 6x}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y^2 + 6x}{2y} = 3\frac{x}{y} - \frac{1}{2}y$$

Równanie

$$\frac{dx}{dy} = 3\frac{x}{y} - \frac{1}{2}y \tag{5}$$

to równanie liniowe niejednorodne. Do znalezienia jego rozwiązania używamy metody uzmienniania stałej. Najpierw szukamy rozwiązania równania jednorodnego:

$$\frac{dx}{dy} = 3\frac{x}{y}$$
$$\frac{dx}{x} = 3\frac{dy}{y}$$
$$\log|x| = \log|y|^3 + C$$
$$|x| = C|y^3|$$
$$x = Cy^3$$

Rozwiązanie ogólne to $x = Cy^3$, gdzie C to dowolna stała. Teraz szukamy szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego. Zakładamy, że $x = C(y)y^3$, i podstawiamy x do równania (5):

$$\frac{dx}{dy} = C'(y)y^3 + 3y^2C(y) = 3C(y)y^2 - \frac{1}{2}y$$
$$C'y^3 = -\frac{1}{2}y$$
$$C' = -\frac{1}{2y^2}C(y) = \frac{1}{2y} + A$$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (5) to więc

$$x = \left(\frac{1}{2y} + A\right) y^3 = Ay^3 + \frac{1}{2}y^2,$$

gdzie A to dowolna stała. ♣

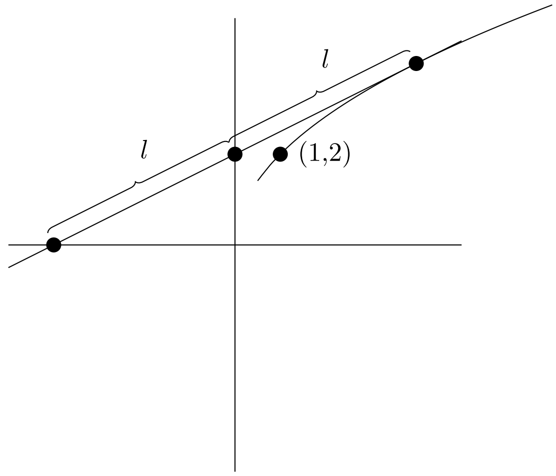
Zadanie 10.2. (Krystian Gładych) Znajdź równanie krzywej na płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt (1,2), która spełnia warunek: odcinek stycznej między punktem styczności a osią OX jest dzielony na połowę punktem przecięcia z osią OY.

Rozwiązanie. Szukamy prostej o równaniu $y = f(x)$. Równanie prostej stycznej do krzywej $f(x)$ w punkcie x_0 to $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Punkt przecięcia tej prostej z osią OY to

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, y = 0,$$

natomiast punkt przecięcia z osią OX to

$$x = 0, y = -x_0 f'(x_0) + f(x_0).$$



Z warunku podanego w treści zadania wynika, że środek odcinka stycznej między punktem styczności a osią OX ma współrzędne

$$(\frac{1}{2}(x_0 + (x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)})), \frac{1}{2}f(x_0)) = (0, -x_0 f'(x_0) + f(x_0)),$$

czyli

$$2x_0 f'(x_0) = f(x_0).$$

Otrzymane równanie musi być prawdziwe dla każdego x_0, czyli dla dowolnego x i $y = f(x)$ mamy

$$2x\frac{dy}{dx} = y.$$

To oznacza, że dla $x, y \neq 0$ mamy

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}.$$

Po scałkowaniu obu stron równania otrzymujemy

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + c,$$

czyli

$$y = C\sqrt{|x|},$$

gdzie C oraz c to jakieś stałe. Krzywa przechodzi przez punkt $(1, 2)$, czyli $C = 2$, a szukane równanie to $y = 2\sqrt{|x|}$. ♣

Zadanie 10.3. (Hubert Andrzejewski) Znaleźć punkty krytyczne funkcji danej niejawnie równaniem: $3z^3 - 7z\cos(x+y) + \frac{20x}{x^2+1} = 0$, zbadać typ wybranego punktu krytycznego.

Obliczmy obie pochodne funkcji:

$$F_x(x, y, z) = 7z\sin(x+y) + 20\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, F_y(x, y, z) = 7z\sin(x+y)$$

Po przyrównaniu pochodnych do zera i rozwiązaniu równań widzimy, że jednocześnie zerują się one gdy:

$$x + y = k\pi, x = \pm 1; (k \in Z)$$

A zatem otrzymujemy następujące możliwości: $(x, y) = (1, -1 + 2k\pi)$, $(x, y) = (1, -1 + \pi + 2k\pi)$, $(x, y) = (-1, 1 + 2k\pi)$, $(x, y) = (-1, 1 + \pi + 2k\pi)$. Wstawiając powyższe punkty do wyjściowego równania i rozwiązując i biorąc tylko rzeczywiste rozwiązania otrzymujemy: Dla pierwszego przypadku:

$$F(1, -1 + 2k\pi, z) = 3z^3 - 7z + 10 = (z+2)(3z^2 - 6z + 5) = 0$$

$z = -2$, gdyż $\Delta < 0$
Dla drugiego przypadku:

$$F(1, -1 + \pi + 2k\pi, z) = 3z^3 + 7z + 10 = (z + 1)(3z^2 - 3z + 10) = 0$$

$z = -1$, gdyż $\Delta < 0$
Dla trzeciego przypadku:

$$F(-1, 1 + 2k\pi, z) = 3z^3 - 7z - 10 = (z - 2)(3z^2 + 6z + 5) = 0$$

$z = 2$, gdyż $\Delta < 0$
Dla czwartego przypadku:

$$F(-1, 1 + \pi + 2k\pi, z) = 3z^3 + 7z - 10 = (z - 1)(3z^2 + 3z + 10) = 0$$

$z = 1$, gdyż $\Delta < 0$
A zatem otrzymujemy następujące punkty krytyczne:

$$(1, -1 + 2k\pi, -2), (1, -1 + \pi + 2k\pi, -1), (-1, 1 + 2k\pi, 2), (-1, 1 + \pi + 2k\pi, 1)$$

Gdy weźmiemy pod uwagę periodyczność kosinusa, okaże się, że wszystkie punkty mają identyczny charakter, połóżmy k = 0 i sprawdźmy jak w otrzymanych punktach zachowuje się pochodna funkcji wyjściowej po z, która przyjmuje wartość $F_z(x, y, z) = 9z^2 - 7\cos(x + y)$. Wstawiając powyższe punkty do pochodnej otrzymujemy wartości: 29, 16, 29, 16. Obliczamy drugie pochodne wyjściowej funkcji po x i y wraz z pochodną mieszaną:

$$F_{xx}(x, y, z) = 7z\cos(x + y) + 40x\frac{x^2 - 3}{(1 + x^2)^3}, F_{yy}(x, y, z) = F_{xy}(x, y, z) = 7z\cos(x + y)$$

stąd można wyznaczyć macierze form kwadratowych:
$Q_{1,-1,-2} = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -24 & -14 \\ -14 & -14 \end{pmatrix}$; $Q_{1,-1+\pi,-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$;
$Q_{-1,1,2} = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 24 & 14 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$; $Q_{-1,1+\pi,1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}$
Teraz należy zbadać określoność formy kwadratowej, można skorzystać z kryterium Sylvestera: Widzimy, że pierwsza jest dodatnio określona w punkcie (1, -1) więc w tym punkcie funkcja funkcja z = z(x, y) ma minimum lokalne. W drugim przypadku mamy mieszaną sygnaturę, więc funkcja z = z(x,y) w $(1, -1 + \pi)$ ma punkt siodłowy. w trzecim przypadku macierz jest ujemnie określona, więc funkcja ma maksimum, a w czwartym przypadku macierz jest nieokreślona, czyli z=z(x, y) ma w $(-1, 1 + \pi)$ punkt siodłowy.

Zadanie 10.4. (Hubert Andrzejewski) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $g : R^3_+ \to R$, $g(x, y, z) = x + 4y + \frac{1}{z} + \frac{z+1}{xy}$

Obliczmy f'_x, f'_y, f'_z:

$$f'_x = 1 - \frac{z + 1}{x^2 y}, f'_y = 4 - \frac{z + 1}{xy_2}, f'_z = \frac{1}{xy} - \frac{1}{z^2}$$

Teraz standardowo, przyrównujemy pochodne do 0 następnie wyznaczamy $z + 1$ z f'_x oraz f'_y i porównując obie pochodne otrzymujemy, że $y = \frac{1}{4}x$.Teraz rugujemy y z $f'_x = f'_z = 0$ w końcu otrzymujemy:

$$x^3 = 4(z + 1), z^2 = \frac{1}{4}x^2 \to x = 2z$$

Po wstawieniu x do powyższego równania otrzymamy następujące równanie trzeciego stopnia na z:

$$0 = 2z^3 - z - 1 = (z - 1)(2z^2 + 2z + 1)$$

Otrzymujemy tylko jedno rozwiązanie $z = 1$, gdyż w równaniu kwadratowym $\Delta < 0$, a zatem po wstawieniu wartości z do równań na pozostałe zmienne dostajemy jedyny punkt krytyczny: $(x, y, z) = (2, \frac{1}{2}, 1) \to f(2, \frac{1}{2}, 1) = 7$

W celu zbadania rodzaju punktu krytycznego obliczmy wartości drugich pochodnych w tym punkcie(zapisano same wartości):

$$f''_{xx} = 1, f''_{xy} = 2, f''_{xz} = -\frac{1}{2}, f''_{yy} = 16, f''_{xz} = -2, f''_{zz} = 2$$

Zbudujmy teraz macierz pochodnych i obliczmy wyznaczniki macierzy $1x1$, $2x2$, $3x3$(oznaczmy je jako Δ_i gdzie $i = 1, 2, 3$):

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 16 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 12, \Delta_3 = 20$$

Widzimy, ze każdy wyznacznik jest większy od 0 zatem funkcja ma w tym punkcie minimum.

Zadanie 10.5. (Hubert Andrzejewski) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji
$f : R^n \setminus \{0\} \to R,\ f(x) = \frac{1}{\|x\|} + a_1x_1 + ... + a_nx_n$
$\|x\| = \sqrt{\sum_i^\infty (x_i)^2}$, a_i dane, przynajmniej jedno a_i niezerowe.

Dla ułatwienia przy liczeniu pochodnej funkcji f, policzmy najpierw pochodną normy wprowadzając oznaczenie: $g(x) = \|x\|$:

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} = \frac{2}{2\sqrt{\sum_i^\infty (x_j)^2}} = \frac{x_j}{g(x)}$$

Teraz wstawmy tę pochodną do wzoru na funkcję f, przy czym pochodna drugiej części f, to stała, przez co możemy wnioskować, że punkt krytyczny zależy tylko od "zachowania" normy.

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_j} = g(x)' + \frac{\partial}{\partial x_j}(a_1x_1 + a_jx_j) = -g^{-2}\frac{x_j}{g} + a_j = a_j - r^{-3}x_j$$

Przyrównując powyższą pochodną do 0 dostajemy:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall j : x_j = g^3 a_j \Leftrightarrow x_j = g^3$$

Wstawiając otrzymaną wartość do funkcji g, możemy wyznaczyć "zachowanie" normy a zatem i punkt krytyczny: $g = \|x\| = \|g^3\| = g^3\|\bullet\|$, więc $g^{-2} = \|\bullet\|; g = \|\bullet\|^{-\frac{1}{2}}$, po podniesieniu g do trzeciej potęgi mamy: $g^3 = \|\bullet\|^{-\frac{3}{2}}$, który jest jedynym punktem krytycznym, funkcja f przyjmuje w nim wartość $f(x) = 2\|x\|^{\frac{1}{2}}$.
W celu zbadania rodzaju punktu krytycznego, policzmy drugie pochodne funkcji f po x_i oraz x_j:

$$f''_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_j - g^{-3}x_j) = 3g^{-5}x_ix_j - g^{-3}\delta_{ij}$$

Zatem zapisując drugie pochodne w postaci formy o współczynnikach h_i,h_j:

$$f''(x)(h_i, h_j) = \sum_{i,j} f''_{i,j}h_ih_j = g^{-5}(3(\sum_{i=1}^n x_ih_i)^2 - \|x_i\|^2\|x_j\|^2)$$

Stąd widzimy, że forma jest nieokreślona dla $n > 1$ w związku z tym punkt krytyczny $\|\bullet\|^{-\frac{3}{2}}$ funkcji f jest punktem siodłowym.

Zadanie 10.6. (Hubert Andrzejewski) Niech $S = \{(x, y, z) : z = xy\}$. Wykazać, że S jest powierzchnią prostokreślną, tzn jest sumą mnogościową rodziny prostych w R^3
Wskazówka: Rozważyć część wspólną płaszczyzny stycznej $\{p + T_pS\}$ z S dla $p \in S$

Dowód. Najpierw wykażemy, ze S jest powierzchnią. Niech S będzie zadana równaniem $g(x, y, z) = xy - z$ policzmy pochodne funkcji g po x, y, z w puncie $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Wartość pochodnych to: $f'(x, y, z)_{p_0} = [y_0, x_0, -1] \neq 0$, więc S jest gładką powierzchnią, do tego mamy przestrzeń styczną w punkcie p_0 postaci $T_{p_0} = ker[x_0, y_0, -1]$. Zatem płaszczyzna styczna $K = K_{p_0}$ wyrażona jest przez równanie:

$$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

A część wspólna płaszczyzny stycznej K z powierzchnią S ma postać:

$$S \cap K = \{T : z = xy, h(x, y) = 0\}$$

gdzie:

$$h(x, y) = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - xy + x_0y_0 = (x - x_0)(y - y_0)$$

Zatem $S \cap K = \{T : (x = x_0, z = x_0y) \vee (y = y_0, z = xy_0)\} = L_1 \cup L_2$, gdzie L_1, L_2 są prostymi o równaniach:

$$L_1 = \{\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{x_0}\}, L_2 = \{\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{y_0}\}$$

Co dowodzi, że powierzchnia S jest prostokreślną. ♣

Zadanie 10.7. (Hubert Andrzejewski) Wyrazić grad, div, Δ, rot we współrzędnych parabolicznych:

$$\{(u, v, \phi) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, 2\pi) : (x = uvcos(\phi), y = uvsin(\phi), z = \frac{u^2 + c^2}{2})\}$$

Zacznijmy od wyznaczenia wektorów bazy współrzędnych parabolicznych:$(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial \phi})$.

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z} = ucos(\phi)\frac{\partial}{\partial x} + usin(\phi)\frac{\partial}{\partial y} + (-v)\frac{\partial}{\partial z}$$

Reszta analogicznie tylko różniczkujemy składowe współrzędnych po kolejnej zmiennej. Ponieżej zebrano wyniki:
$\frac{\partial}{\partial v} = ucos(\phi)\frac{\partial}{\partial x} + usin(\phi)\frac{\partial}{\partial y} + (-v)\frac{\partial}{\partial z}$
$\frac{\partial}{\partial u} = vcos(\phi)\frac{\partial}{\partial x} + vsin(\phi)\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial z}$
$\frac{\partial}{\partial \phi} = -uvsin(\phi)\frac{\partial}{\partial x} + uvcos(\phi)\frac{\partial}{\partial y} + 0\frac{\partial}{\partial z}$

W kolejnym kroku wyznaczmy tensor metryczny, jak wiadomo składowe tensora metrycznego g_{ij}, to iloczyny skalarne $(\bullet|\bullet)$ wektorów bazy:

$$g_{vv} = (\frac{\partial}{\partial v}|\frac{\partial}{\partial v}) = u^2cos^2(\phi) + u^2sin^2(\phi) + v^2 = u^2 + v^2$$

$$g_{uu} = (\frac{\partial}{\partial u}|\frac{\partial}{\partial u}) = v^2cos^2(\phi) + v^2sin^2(\phi) + u^2 = u^2 + v^2$$

$$g_{\phi\phi} = (\frac{\partial}{\partial \phi}|\frac{\partial}{\partial \phi}) = (uv)^2sin^2(\phi) + (uv)^2cos^2(\phi) = (uv)^2$$

Policzmy teraz iloczyny mieszane, co posłuży do udowodnienia, że są to współrzędne ortogonalne(każde "ważniejsze" układy współrzędnych są ortogonalne):

$$g_{vu} = g_{uv} = (\frac{\partial}{\partial v}|\frac{\partial}{\partial u}) = vucos^2(\phi) + vusin^2(\phi) - vu = 0$$

$$g_{u\phi} = g_{\phi u} = (\frac{\partial}{\partial u}|\frac{\partial}{\partial \phi}) = -uv^2sin(\phi)cos(\phi) + uv^2sin(\phi)cos(\phi) = 0$$

$$g_{v\phi} = g_{\phi v} = (\frac{\partial}{\partial v}|\frac{\partial}{\partial \phi}) = -u^2vsin(\phi)cos(\phi) + u^2vsin(\phi)cos(\phi) = 0$$

Widzimy więc że współrzędne są ortogonalne, zatem macierz tensora metrycznego ma postać: $g_{ij} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & (uv)^2 \end{pmatrix}$

a macierz odwrotna(która też się przyda w dalszych obliczeniach) ma postać:
$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2+v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(uv)^2} \end{pmatrix}$

Do obliczenia gradientu wykorzystamy wzór $(gradf)^i = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}$ gdzie f to dowolna funkcja, a g^{ij} oznacza składowe i,j tensora dualnego do tensora metrycznego.

$$gradf = (gradf)^u + (gradf)^v + (gradf)^\phi = g^{uu}\frac{\partial f}{\partial u} + g^{vv}\frac{\partial f}{\partial v} + g^{\phi\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{1}{u^2+v^2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{u^2+v^2}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{(uv)^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

Można to zapisać także jako $[\frac{1}{u^2+v^2}\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{1}{u^2+v^2}\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{1}{(uv)^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}]$ Dywergencję wyznaczymy ze wzoru: $div(X)^j = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^j}\sqrt{det(g_{ij})}X^j$
gdzie: X^j składową pola wektorowego dla j-tej współrzędnej.

$$div(X)^u = \frac{1}{u(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial u}(u(u^2+v^2)X^u)$$

$$div(X)^v = \frac{1}{v(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial v}(v(u^2+v^2)X^v)$$

$$div(X)^\phi = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial \phi}(uv(u^2+v^2)X^\phi)$$

Pełne wyrażenie na dywergencje jest sumą powyższych wyrażeń.
W celu wyznaczenie rotacji wykorzystamy wzór:

$$rot(X)^l = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}\epsilon^{lkj}\frac{\partial}{\partial x^k}(x^i g_{ij})$$

Wyznaczmy rotację dla współrzędnej v pola wektorowego, dla u oraz ϕ analogicznie.

$$rot(X)^v = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\epsilon^{vkj}(\frac{\partial}{\partial x^k}(x^i g_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i g_{ij})) =$$

$$\frac{1}{uv(u^2+v^2)}(\frac{\partial}{\partial \phi}(x^u g_{uu}) - \frac{\partial}{\partial u}(x^\phi g_{\phi\phi})) =$$

$$\frac{1}{uv(u^2+v^2)}(\frac{\partial}{\partial \phi}(u^2+v^2)(X^u)) - \frac{\partial}{\partial u}((u^2+v^2)(X^\phi)))$$

Dla współrzędnej u:

$$rot(X)^u = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}(\frac{\partial}{\partial v}((uv)^2)(X^\phi)) - \frac{\partial}{\partial \phi}((u^2+v^2)(X^v)))$$

Dla współrzędnej ϕ:

$$rot(X)^u = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}(\frac{\partial}{\partial u}((u^2+v^2)(X^v)) - \frac{\partial}{\partial v}((u^2+v^2)(X^u)))$$

gdzie:
ϵ^{lkj} to antysymetryczny tensor Levi-Civity.
Do wyznaczenia Laplasjanu wykorzystamy następujący wzór:

$$(\Delta f)^i = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{det(g_{ij})}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}f)$$

Szczegółowo zapiszemy obliczenia dla składowej u Laplasjanu, kolejne dwie składowe analogicznie:

$$(\Delta f)^u = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial u}((u^2+v^2)\frac{1}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial u}f) =$$

$$\frac{1}{(u^2+v^2)}\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}((u)\frac{\partial}{\partial u}f) =$$

Składowa v:

$$(\Delta f)^v = \frac{1}{(u^2+v^2)}\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}u\frac{\partial}{\partial v}f$$

Składowa ϕ:

$$(\Delta f)^\phi = \frac{1}{(uv)^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}f$$

Laplasjan jest sumą powyższych składowych.

Zadanie 10.8. (Hubert Andrzejewski) Wykazać, że równania $y^2+t^2-2xz=0$ i $z^3+y^3+t^3-z^3=0$ określają (x,z) jako funkcję (y,t) w otoczeniu punktu $(x_0,y_0,z_0,t_0)=(1,-1,1,1)$ Obliczyć $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ w tym punkcie.

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia:

$$g(x,y,z,t)=y^2+t^2-2xz, h(x,y,z,t)=z^3+y^3+t^3-z^3$$

Sprawdźmy czy $f(g,h)=0\in R^2$ czyli musi zachodzić, $g(1,-1,1,1)=0$ oraz $h(1,-1,1,1)=0$. Wykonując działania widzimy że podane tożsamości są prawdziwe. Jeśli w otoczeniu tego punktu f zadaje funkcje $x=x(y,t)$ oraz $z=z(y,t)$, to musi zachodzić:

$$g(x(y,t),y,z(y,t),t)=0, h(x(y,t),y,z(y,t),t)=0$$

Wstawiając punkty widzimy, że powyższe tożsamości są spełnione, czyli równania z treści określają zadane funkcje w otoczeniu danego punktu. Teraz policzmy pochodne po y(w poniższych wyrażeniach indeks dolny oznacza zmienną po której różniczkujemy). ♣

$$\frac{\partial}{\partial y}g(x(y,t),y,z(y,t),t)=2y-2zx_y-2xz_y=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}h(x(y,t),y,z(y,t),t)=3x^2x_y+3y^2-3z^2z_y=0$$

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie x_y, z_y z powyższych równań. Najszybciej zrobić to metodą macierzową:
$\begin{pmatrix} z & x \\ 3x^2 & -3z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_y \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -3y^2 \end{pmatrix}$
Mnożąc prawą stronę powyższego wyrażenia, przez odwrotność lewej skrajnej macierzy otrzymujemy rozwiązania:

$$x_y=\frac{yz^2-xy^2}{x^3+z^3}, z_y=\frac{yx^2+zy^2}{x^3+z^3}$$

Teraz wyznaczmy pochodne po t:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(x(y,t),y,z(y,t),t)=2t-2zx_t-2xz_t=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}h(x(y,t),y,z(y,t),t)=3x^2x_t+3t^2-3z^2z_t=0$$

Można teraz postąpić jak poprzednio zapisując równania w formie macierzowej i rozwiązując je:
$\begin{pmatrix} z & x \\ 3x^2 & -3z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -3t^2 \end{pmatrix}$
ale, już na etapie wypisania macierzy widać, że g oraz h są symetryczne ze względu na zamianę $y \leftrightarrow t$, czyli rozwiązania mają postać:

$$x_t=\frac{tz^2-xt^2}{x^3+z^3}, z_t=\frac{tx^2+zt^2}{x^3+z^3}$$

Wstawiając do wyrażeń na x_y, x_t, z_y, z_t zadany punkt $(1,-1,1,1)$ otrzymujemy wartości pochodnych o które poproszono nas w treści zadania, przy czym $x_y=-1$ natomiast pozostałe wynoszą 0.

Zadanie 10.9. (Hubert Andrzejewski) Funkcje $u, v, w : R^3_+ \mapsto R$ dane są wzorami $u(x, y, z) = x + y + z$, $v(x, y, z) = xyz$, $w(x, y, z) = z^3$ Traktując w jako nową zmienną zależną $(u, v) \mapsto w(u, v)$ wyrazić we współrzędnych (u, v, w) równanie:

$$(3z^2 - 1)(x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{xy}{z}(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}) = x - y$$

a następnie rozwiązać równanie.
Wskazówka: Różniczkować $z^3(x, y) = w(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y))$

Postępując zgodnie ze wskazówką, różniczkujemy względem x, y tożsamość:

$$w(x + y + z(x, y), xyz(x, y)) = [z(x, y)]^3$$

Dostajemy:

$$\begin{cases} w'_u(1 + z'_x) + w'_v(yz + xyz'_x) = 3z^2z'_x \\ w'_u(1 + z'_y) + w'_v(xz + xyz'_y) = 3z^2z'_y \end{cases}$$

Stąd:

$$\begin{cases} z'_x = \frac{1}{M}(w'_u + yzw'_v) \\ z'_y = \frac{1}{M}(w'_u + xzw'_v) \end{cases}$$

gdzie $M = 3z^2 - w'_u - xyw'_v$
Wstawiając powyższe wyrażenia do równania z treści zadania, otrzymujemy:

$$(3z^2 - 1)[x(w'_u + yzw'_v) - y(w'_u + xzw'_v)] + xy(y - x)w'_v = (x - y)(3z^2 - w'_u - xyw'_v)$$

Po uproszczeniu:

$$(3z^2 - 1)(x - y)w'_u + xy(y - x)w'_u = (x - y)(3z^2 - w'_u - xyw'_v)$$

Ostatecznie:

$$3z^2w'_u = 3z^2 \to w'_u = 1 \to w(u, v) = u + \phi(v)$$

Czyli rozwiązanie równania jest postaci:

$$z^3 = x + y + z + \phi(x, y, z)$$

Zadanie 10.10. (Hubert Andrzejewski) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji

$$F : R^n \ni (x_1, ..., x_n) \longmapsto (1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \in R$$

N zabiorze $M = (x_1...x_n) : x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1,\ x_i > 0$

$$M = G^{-1}(0)\ \ G(x_1, .., x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n - 1)$$

$$dF - \lambda dG = (1 + x_2)...(1 + x_1)dx_1 + ... + (1 + x_1)...(1 + x_{n-1})dx_n - \\ \lambda(x_2...x_n dx_1 + x_1x_3...x_n dx_2 + ... + x_1...x_{n-1}dx_{n-1}) = 0$$

Ponieważ wszystkie x_i mają być dodatnie, to można bez straty ogólności pomnożyć pierwsze równanie przez $(1 + x_1)$,
drugie przez $(1 + x_2)$ itd.
n-te przez $(1 + x_n)$

$$\begin{aligned} &(1 + x_2)...(1 + x_n) - \lambda x_2...x_n = 0 \\ &(1 + x_1)(1 + x_3)...(1 + x_n) - \lambda x_1x_3...x_n = 0 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &(1 + x_1)...(1 + xn - 1) - \lambda x_1...x_{n-1} = 0 \\ &i - te\, rownanie : \\ &(1 + x_1)...(1 + x_n) = \lambda x_1...x_{n-1} = \end{aligned}$$

Dla każdej pary $i \neq j$: $\lambda x_1...(1+x_i)...x_n = \lambda x_1...(1+x_j)...x_n$
Dla $\lambda \neq 0$ otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&(1+x_i)x_j = x_i(1+x_j)\\
&x_j + x_i x_j = x_i + x_i x_j\\
&x_j = x_i \rightarrow wszystkie\, x_i\, musza\, byc\, rowne.\\
&Warunek,\; G(x_i) = 1\, daje\, x_i = 1\\
&\lambda : 2^{n-1} = \lambda \cdot 1 \cdot 2 \rightarrow \lambda = 2^{n-2}
\end{aligned}
$$

Dla $\lambda = 0$ mamy $dF = 0$, a to ma miejsce jedynie gdy przynajmniej dwa spośród wszystkich x_i są równe -1, a taki punkt nie należy do G
Mamy zatem punkt krytyczny $(1, ..., 1)$, badamy jego rodzaj:

$$
h_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i x^j} \quad x \neq j, \quad h_{ij}(x) = (1+x_1)...(1+x_n) = |_{(1,...,1)} 2^{n-1}
$$

$$
x = j \quad h_{ij} = 0
$$

$$
g_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^i x^j} \quad x \neq j, \quad g_{ij}(x) = x_i...x_j = |_{(1,...,1)} 1
$$

$$
i = j \quad g_{ij} = 0
$$

$h_{ij} - \lambda g_{ij}(1, ..., 1) = 0$, zatem druga pochodna nie rozstrzyga. O tym, że jest to minimum można się przekonać rozważając co dzieje się gdy przynajmniej jedna zmienna dąży do 0. Ze względu na warunek $G(x) = 1$ oznacza to, że przynajmniej jedna zmienna dąży do ∞, a to pociąga $F(x) \rightarrow \infty$.Zatem punkt $(1, ..., 1)$ jest punktem globalnego minimum.

Zadanie 10.11. (Hubert Andrzejewski) Obliczyć normę odwzorowania liniowego,
$L : R^2 \rightarrow R^2$, $L(x, y) = (x + 3y, 3x + y)$,
jeśli w dziedzinie i obrazie rozważamy normę euklidesową:
$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\|L\| = sup\|L(x, y)\|_2$, $\|(x, y)\|_2 = 1$

$$
\begin{aligned}
&f(x, y) = (x + 3y)^2 + (3x + y)^2\\
&\|L\| = sup\sqrt{f(x, y)} = \sqrt{supf(x, y)}\\
&f(x, y) = x^2 + 9y^2 + 6xy + 9x^2 + y^2 + 6xy = 10(x^2 + y^2) + 12xy
\end{aligned}
$$

Badać można w zasadzie jedynie funkcję: $g(x, y) = xy$, na zbiorze: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
$\phi(x, y, \lambda) = g(x, y) - \lambda F(x, y)$, indeks dolny oznacza różniczkowanie po danej zmiennej.

$$
\begin{aligned}
&\phi_x = y - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow y = 2\lambda x\\
&\phi_y = x - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow y = 2\lambda y\\
&\lambda = \pm\frac{1}{2}\\
&\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -y = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -y = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Są zatem 4 punkty krytyczne:
dla $\lambda = \frac{1}{2}$ mamy:
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
a dla $\lambda = -\frac{1}{2}$ mamy:
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Liczymy drugie pochodne, a następnie budujemy ich macierze.

$$\phi_{xx} = \phi_{yy} = -2\lambda$$
$$\phi_{xy} = 1$$

$\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$
Po wstawieniu wartości współczynników $\lambda \pm \frac{1}{2}$
otrzymujemy odpowiednio dla $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
W celu wyznaczenia punktów krytycznych rozwiązujemy zagadnienia własne. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow$ *minimum*
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} =$ -4$< 0 \Rightarrow$ *maksimum*
Największa wartość $g(x,y)$ na zbiorze $x^2+y^2=1$ to $\frac{1}{2}$, najmniejsza $-\frac{1}{2}$

$$f(x,y) = 10(x^2+y^2) + 12xy = |_{x^2+y^2=1} 10 + 12xy$$

Największa wartość f na zbiorze $x^2+y^2=1$ to 16, najmniejsza 4 $\|L\| = \sqrt{16} = 4$

11 Funkcje pierwotne

Zadanie 11.1. (Hubert Andrzejewski) Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego:

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y, \;\; x(0) = 1,\, y(0) = 1,\, z(0) = 3$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y - z$$
$$\frac{dz}{dt} = -2x + 5y - z$$

Zapisujemy macierz A związaną z układem równań, a następnie rozwiązujemy zagadnienie własne tej macierzy.
$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
$\omega_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ -2 & 5 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$\begin{aligned} &= -(1+\lambda)(3-\lambda)^2 - 2 + 5(3-\lambda) = \\ &-(1+\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2) - 2 + 15 - 5\lambda = \\ &-(9-6\lambda+\lambda^2+9\lambda-6\lambda^2+\lambda^3) + 13 - 5\lambda = \\ &-9-3\lambda+5\lambda^2-\lambda^3+13-5\lambda = \\ &-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4 = -(\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4) = \\ &(1-\lambda)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

$$ker(A-\mathbf{1}) = ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-2} \end{pmatrix} - Span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \; ker(A-2\cdot\mathbf{1}) = ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-3} \end{pmatrix} - Span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ker(A-2\cdot\mathbf{1})^2 = ker(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix})^2 = ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix} = ker$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

$$ker(A-2\cdot\mathbf{1})w_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$$

Warunki początkowe rozkładu w bazie (v_1, v_2, v_3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

W celu znalezienia α, β, γ rozwiązujemy powyższy układ równań, np. metodą eliminacji Gaussa.Wartości współczynników wynoszą $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 2$.

Poprawność otrzymanych współczynników można sprawdzić wstawiając je do powyższego układu równań.

W końcu możemy zapisać rozwiązanie zagadnienia początkowego:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$2e^{At}v_1 - 3e^{At}v_2 + 2e^{At}w_2 =$$

$$2e^{t}v_1 - 3e^{2t}v_2 + 2(e^{2t}w_2 + te^{2t}v_2) = *$$

$$e^{At}w_2 = e^{(A-2\cdot\mathbf{1})t + 2\cdot\mathbf{1}t}w_2 = e^{2t}(\mathbf{1} + (A-2\cdot\mathbf{1})t + ...)w_2 = e^{2t}w_2 + te^{2t}v_2$$

$$* = 2e^{t}v_1 + (-3+2t)e^{2t}v_2 + 2e^{2t}w_2 =$$

$$= 2e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-3+2t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{t} + e^{2t}(-1+2t) \\ 4e^{t} + e^{2t}(-3+2t) \\ 8e^{t} + e^{2t}(-5+2t) \end{pmatrix}$$

Zadanie 11.2. (Hubert Andrzejewski)

Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dla jakich warunków początkowych rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania:
$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$ $x : R \to R^3$ spełnia warunek:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

$$det(A - \lambda\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^3 + 2 - 2(1-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2 =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 = \lambda^2(3-\lambda) \;\; Sp(A) = \{0, 3\}$$

Gdy $\lambda = 0$:

$$ker(A) = ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Span\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \} = v_0$$

$ker(A^2) = ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Span\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$A\omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_0$

Dla $\lambda = 3$

$ker(A - 3 \cdot \mathbf{1}) = ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = Span\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \} = v_3$

$$\lim_{t \to -\infty} e^{At} v_0 = v_0$$

$$e^{At} w_0 = (\mathbf{1} + At + A^2 t^2 \cdot \frac{1}{2} + ...) w_0 = w_0 + t v_0, \ w \ -\infty \ brak \ granicy$$

$$\lim_{t \to -\infty} e^{At} v_3 = 0$$

Zatem warunki początkowe muszą być proporcjonalne do v_3.

Zadanie 11.3. (Hubert Andrzejewski) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:
$x(t)''' - 3x(t)' - 2x(t) = \cosh(t) - 1$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

Pierwiastki tego równania to:

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 2$$

ROJR:$x(t) = (A + Bt)e^{-t} + Ce^{2t}$
Niejednorodność: $b_1(t) + b_2(t) + b_3(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - 1$
W zasadzie, to są 3 różne niejednorodności oznaczone b_i $i = 1, 2, 3$ b_1, b_3 nie są rezonansowe, b_2 jest.
Dla b_1:
$x(t) = Ae^t$:$Ae^t - 3Ae^t - 2Ae^t = \frac{1}{2}e^t - 4A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{8} \Rightarrow x_1(t) = -\frac{1}{8}e^t$
Dla b_3:
$x(t) = A$:$-2A = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3(t) = \frac{1}{2}$
Dla b_2:

$$\begin{aligned}
&x(t) = At^2 e^{-t} \\
&\frac{dx}{dt} = (2At - At^2)e^{-t} \\
&\frac{d^2x}{dt^2} = (2A - 2At - 2At + At^2)e^{-t} = (2A - 4At + At^2)e^{-t} \\
&\frac{d^3x}{dt^3} = (-4A + 2At - 2A + 4At - At^2)e^{-t} = (-6A + 6At - At^2)e^{-t} \\
&(-6A + 6At - At^2) - 3(2At - At^2) - 2At^2 = -\frac{1}{2} \\
&t^2(-A + 3A - 2A) + t(6A - 6A) + (-6A) = -\frac{1}{12} \\
&A = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

RORN:
$x(t) = (At + B)e^{-t} + Ce^{2t} + \frac{1}{12}t^2 e^{-t} - \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2}$

Zadanie 11.4. (Hubert Andrzejewski) W R^4 wprowadzamy uogólnione współrzędne sferyczne $(r, \theta_1, \theta_2, \phi)$ dane wzorami:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= rcos\theta_1 \\
x^2 &= rsin\theta_2 cos\theta_1 \\
x^3 &= rsin\theta_2 sin\theta_1 sin\phi \\
x^4 &= rsin\theta_2 sin\theta_1 cos\phi \\
&gdzie: \\
r \in]0,\infty[, \theta_1 \in]0,\pi[, \theta_2 &\in]0,\pi[, \phi \in]0, 2\pi[
\end{aligned}
$$

Wyrazić w nowych współrzędnych $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$
Wskazówka: Zamiast długich rachunków zamieniać zmienne w kilku krokach:

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) \longrightarrow (x^1, x^2, \rho_1, \phi,) \longrightarrow (x^1, \rho_2, \theta_1, \phi,) \longrightarrow (r, \theta_2, \theta_1, \phi,)$$

$$
\begin{aligned}
dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 &= \\
dx^1 \wedge dx^2 \wedge d\rho_1 \wedge d\phi &= \\
\rho_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge d\rho_1 \wedge d\phi &= \\
\rho_2 sin\theta_1 dx^1 \wedge \rho_2 d\rho_2 \wedge d\theta_1 \wedge d\phi &= \\
\rho_2^2 sin\theta_1 dx^1 \wedge d\rho_2 \wedge d\theta_1 \wedge d\phi &= \\
r^2 sin^2\theta_2 sin\theta_1 r dr \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_1 \wedge d\phi &= \\
r^3 sin^2\theta_2 sin\theta_1 dr \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_1 \wedge d\phi &
\end{aligned}
$$

W kolejnych krokach podstawiano:

$$
\begin{aligned}
1 \to 2 &: x^3 = \rho_1 sin\phi,\ x^4 = \rho_1 cos\phi \\
2 \to 3 &: x^2 = \rho_2 cos\theta_1,\ \rho_1 = \rho_2 sin\theta_1 \\
3 \to 4 &: x^1 = rcos\theta_2,\ \rho_2 = rsin\theta_2
\end{aligned}
$$

12 Całka Riemanna

Zadanie 12.1. (Krystian Gładych) Rozwiąż całkę $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$.

Rozwiązanie. Przekształcamy całkę:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin^2 x - 1}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{2\pi} 1 - \frac{1}{1+\sin^2 x} dx = 2\pi - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$$

Szukamy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$. Dzielimy licznik i mianownik przez $\cos^2 x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 + 2\operatorname{tg}^2 x} dx$$

Podstawiamy $t = \operatorname{tg} x$, $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 + 2\operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+2t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\sqrt{2}t)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\,(\sqrt{2}\operatorname{tg}\,x)\Big|_0^{\pi/2}$$

To oznacza, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx = 2\pi - \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi(2-\sqrt{2}),$$

ponieważ $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$. ♣

Zadanie 12.2. (Krystian Gładych) Rozwiąż całkę $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx$.

Rozwiązanie. Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1}{x} + \frac{3-x}{(1+x^2)^2} - \frac{x}{1+x^2}dx$$

Mamy:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \text{ (gdzie } t = 1+x^2)$$

Rozkładamy $\int \frac{3-x}{(1+x^2)^2}dx$ na dwie całki:

$$\int \frac{3-x}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{3}{(1+x^2)^2}dx - \int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

Drugą całkę można obliczyć stosując to samo podstawienie, co wcześniej:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{2+2x^2}$$

Aby obliczyć pierwszą całkę, korzystamy z podstawienia $x = \operatorname{tg}\theta$ i z własności $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$, $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$:

$$\int \frac{3}{(1+x^2)^2}dx = 3\int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = 3\int \cos^4\theta\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int \cos^2\theta d\theta = \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)$$

Mamy $\sin\theta\cos\theta = \operatorname{tg}\theta\cos^2\theta = \operatorname{tg}\theta\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{x}{1+x^2}$, czyli $\int \frac{3}{(1+x^2)^2}dx = \frac{3}{2}(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2})$. Rozwiązaniem problemu jest więc

$$\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{3x+1}{2+2x^2} + C.$$

♣

Zadanie 12.3. (Krystian Gładych) Rozwiąż całkę $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Rozwiązanie. Podstawiamy $x = \sin\theta$, a następnie $t = \cos\theta$:

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta = \int \frac{1}{1-\sin\theta}d\theta = \int \frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta + \int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \operatorname{tg}\theta - \int \frac{1}{t^2}dt = \operatorname{tg}\theta + \frac{1}{\cos\theta}$$

Mamy $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, czyli rozwiązaniem jest

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

♣

Zadanie 12.4. (Hubert Andrzejewski) Korzystając z twierdzeń o całkach z parametrem wyprowadzić tożsamość

$$J(\alpha)' = \frac{\phi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\phi(x)'}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx$$

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\phi(x)'}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx;\ a>0, \phi\in C^1([0,a]), \alpha\in]0,a]$$

Skoro gdy x dąży do α, to całe wyrażenie podcałkowe dąży do nieskończoności, to należy wykonać podstawienie $x = \alpha t$. Wtedy nasza całka przyjmuje postać:

$$J(\alpha) = \sqrt{\alpha} \int_0^1 \frac{\phi(\alpha t)'}{\sqrt{1-t}}\, dt$$

Korzystając z twierdzenia o różniczkowalności funkcji podcałkowej różniczkujemy całkę stosując regułę Leibniza

$$J(\alpha)' = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^1 \frac{\phi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\, dt + \sqrt{\alpha} \int_0^1 \frac{t\phi(\alpha t)'}{\sqrt{1-t}}\, dt$$

Wracając do starej zmiennej:

$$J(\alpha)' = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\alpha \frac{\phi(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\, dx + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{x\phi(\phi)'}{\sqrt{\alpha - x}}\, dx$$

Wykonując pierwszą całkę przez części otrzymujemy wymaganą tożsamość:

$$J(\alpha)' = \frac{\phi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\phi(x)'}{\sqrt{\alpha - x}}\, dx$$

Zadanie 12.5. (Hubert Andrzejewski) Znaleźć jawny wzór na funkcję:

$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} log(a^2 \sin^2(x) + b^2 \cos^2(x))\, dx$$

$a, b \neq 0$,(Jako parametr można użyć $t = \frac{a}{b}$)

$$\log(a^2 \sin^2(x) + b^2 \cos^2 x) = \log[a^2(\sin^2(x) + (\frac{b}{a})^2 \cos^2 x)] =$$
$$2\log(a) + \log(\sin^2(x) + (\frac{b}{a})^2 \cos^2 x) =$$
$$2\log(a) + \log(sin^2(x) + t^2 \cos^2(x))$$

$$F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} log(\sin^2(x) + t^2 \cos^2(x))\, dx\, t > 0\, F(1) = 0$$
$$f(t,x) = \log(\sin^2 x + t^2 \cos^2 x)$$

$f(t,x)$ jest ciągła względem obu zmiennych na $]0, \infty[\times[0, \frac{\pi}{2}]$
Całka jest w sensie właściwym.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2t\cos^2 x}{\sin^2(x) + t^2 \cos^2(x)}$$

$$F'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t\cos^2 x}{\sin^2(x) + t^2\cos^2(x)}\, dx =$$
$$2t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{t^2 + \tan^2(x)} =$$
$$2t \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)(t^2+y^2)} =$$
$$\frac{2t}{t^2-1} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{t^2+y^2}\, dy =$$
$$\frac{2t}{t^2-1}(\arctan(y)|_0^\infty - \frac{1}{t^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+(\frac{y}{t})^2}\, dy) =$$
$$\frac{2t}{t^2-1}(\frac{pi}{2} - \frac{1}{t^2 \arctan(\frac{y}{t}) \cdot t||_0^\infty}) =$$
$$\frac{2t}{t^2-1}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{t+1}$$

W powyższym zastosowano podstawienie:
$t = \tan(x)$
Oraz rozkład funkcji podcałkowej na ułamki proste postaci:
$\frac{A}{1+y^2} + \frac{B}{t^2+y^2}$

$$F'(t) = \frac{\pi}{t+1}$$

$$F(t) = \pi \log(t+1) + C$$

$$F(1) = \pi \log(2) + C = 0$$

$$C = -\pi \log(2)$$

$$F(t) = \pi \log(t+1) - \pi \log(2) = \pi \log(\frac{t+1}{2}) = \pi \log(\frac{\frac{b}{a}+1}{2})$$

$$J(a,b) = \pi \log(a) + \pi \log(b+a) - \pi \log(2a) = \pi \log(\frac{a+b}{2})$$