Neutronika
semestr letni 2023/24

Krzysztof Miernik

Wykład 10

Równanie transportu

- Liczba neutronów w objętości d^3r wokół $\vec{r}$ o energii dE wokół E poruszających się w kierunku $\hat{\Omega} \pm d\Omega$ w czasie t
$$n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t)d^3rdEd\hat{\Omega}$$
- Gdybyśmy znali tę wielkość, moglibyśmy obliczyć wszystkie interesujące nas wielkości
  - Strumień neutronów
  $$\Phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t) \equiv vn(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t)$$
  - Prąd neutronów
  $$\vec{j}(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t) \equiv v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t)$$
  - Prędkość reakcji
  $$R(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t) = \Sigma(\vec{r}, E)\Phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}t)$$

Równanie transportu (2)

- Wyobraźmy sobie pewną objętość V otoczoną powierzchnią S.
- Mechanizmy zmiany liczby neutronów w objetości V

  1. Źródła (w tym rozszczepienie) wewnątrz V
  2. Neutrony ulegające reakcji wewnątrz V (niezależnie czy prowadzi do absorpcji czy rozszczepienia, nastąpi zmiana E lub $\hat{\Omega}$.
  3. Neutrony o energii E', $\hat{\Omega}'$ wewnątrz V rozproszone do $E, \hat{\Omega}$
  4. Neutrony wchodzące lub wychodzące przez powierzchnię S

Równanie transportu (3)

1. Prędkość pojawiania się neutronów w d^3r wokół $\vec{r}$ o energii dE wokół E poruszających się w kierunku $\hat{\Omega} \pm d\Omega$

$$S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)d^3r dE d\hat{\Omega}$$

w objętości V

$$\left[\int_V S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)d^3r\right] dE d\hat{\Omega}$$

2. Straty w wyniku reakcji

$$\Sigma_{tot}(\vec{r}, E)vn(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

w objętości V

$$\left[\int_V \Sigma_{tot}(\vec{r}, E)vn(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)d^3r\right] dE d\hat{\Omega}$$

3. Zysk z rozpraszania z energii E' i kąta Ω'

$$\left[\int_V v'\Sigma_s(E' \to E, \hat{\Omega}' \to \hat{\Omega})n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)d^3r\right] dE d\hat{\Omega}$$

dla rozpraszania z dowolnej innej energii

$$\left[\int_V d^3r \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty v'\Sigma_s(E' \to E, \hat{\Omega}' \to \hat{\Omega})n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)d^3r\right] dE d\hat{\Omega}$$

Równanie transportu (4)

4. Wpływ i wypływ z objętości V.
   Ucieczka przez element powierzchni $d\vec{S}$

$$j(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)d\vec{S} = v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

stąd całkowita zmiana liczby neutronów

$$\int_S d\vec{S}v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

Ta całka, w odróżnieniu od poprzednich jest po S. Za pomocą twierdzenia Gaussa możemy ją zamienić na całkę po V

$$\int_S d\vec{S}\vec{A}(r) = \int_V d^3r\nabla \cdot A(r)$$

$$\left[\int_S d\vec{S}v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)\right] dEd\hat{\Omega} = \left[\int_V d^3r\nabla v\hat{\Omega}n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)\right] dEd\hat{\Omega} =$$
$$\left[\int_V d^3rv\hat{\Omega}\nabla n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)\right] dEd\hat{\Omega}$$

Równanie transportu (5)

- Łącząc wszystkie elementy

$$\int_V d^3r \left[\frac{\partial n}{\partial t} + v\hat{\Omega}\nabla n(r, E, \hat{\Omega}, t) + v\Sigma_{tot} n(r, E, \hat{\Omega}, t) \right.$$
$$\left. - \int_V d^3r \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty v' \Sigma_s(E' \to E, \hat{\Omega}' \to \hat{\Omega}) n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) - S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) \right] dEd\hat{\Omega} = 0$$

- Objętość V była wybrana dowolnie. Aby równanie było spełnione dla dowolnej objętości, funkcja pod całką musi być równa zero.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v\hat{\Omega}\nabla n(r, E, \hat{\Omega}, t) + v\Sigma_{tot} n(r, E, \hat{\Omega}, t) =$$
$$\int_V d^3r \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty v' \Sigma_s(E' \to E, \hat{\Omega}' \to \hat{\Omega}) n(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) + S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

- Postać w zależności od strumienia neutronów

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \hat{\Omega}\nabla \Phi(r, E, \hat{\Omega}, t) + \Sigma_{tot} \Phi(r, E, \hat{\Omega}, t) =$$
$$\int_V d^3r \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty \Sigma_s(E' \to E, \hat{\Omega}' \to \hat{\Omega}) \Phi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t) + S(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t)$$

- Warunek początkowy $\Phi(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, 0) = \Phi_0(\vec{r}, E, \hat{\Omega})$
- Równanie jest
  - Liniowe w zmiennej zależnej (Φ)
  - Ma 7 zmiennych niezależnych $(x, y, z, E, \theta, \phi, t)$
  - Różniczkowo-całkowe (pochodne po t, x, y, z, całki po θ, ϕ, E)

Równanie transportu w jednym wymiarze

Rozważmy postać równania dla przypadku gdy strumień zależy od jednego wymiaru (x)

- Wyrażenie
$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi(x) = \Omega_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$
- Wygodnie jest wybrać układ współrzędnych r, θ wzdłuż osi x. Wtedy $\Omega_x = \cos\theta$, $\Omega_y = \sin\theta$.
- Równanie ma postać
$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Sigma_{tot}\Phi(x, E, \theta, t) =$$
$$\int_0^{2\pi} d\theta' \sin\theta' \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \to E, \theta' \to \theta)\Phi(x, E', \theta', t) + S(x, E, \theta, t)$$
- Zwyczajowo wprowadza się zmienną $\mu = \cos\theta$
$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Sigma_{tot}\Phi(x, E, \mu, t) =$$
$$\int_{-1}^{1} d\mu' \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \to E, \mu' \to \mu)\Phi(x, E', \mu', t) + S(x, E, \mu, t)$$

Wkład od rozszczepienia

- Wyraz $S()$ zawiera wkład od rozszczepienia, który można bardziej szczegółowo rozpisać
- Każde rozszczepienie daje $\nu(E')$ neutronów, a całkowita ich liczba to

$$\int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \Phi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

- Widmo rozszczepienia to $\chi(E)$, jeżeli emisja neutronów jest izotropowa to

$$S_f(\vec{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \Phi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

- Ale w ten sposób mamy tylko neutrony natychmiastowe, musimy dodać neutrony opóźnione, np. poprzez fikcyjne 6 grup izotopów

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\vec{r}, t) + \beta_i \frac{\chi_i(E)}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega}' \int_0^\infty dE' \nu(E') \Sigma_f(E') \Phi(\vec{r}, E', \hat{\Omega}', t)$$

- I do równania transportu dodać wyrazy

$$(1 - \beta_i)\nu \Sigma_f \Phi + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(\vec{r}, t)$$