

Neutronika

semestr letni 2023/24

Krzysztof Miernik

Wykład 8

Rozwiązanie numeryczne równania dyfuzji

- Nasz problem jednowymiarowy wygląda następująco: szukamy stanu stacjonarnego równania

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d\Phi(x)}{dx} + \Sigma_a(x)\Phi(x) - \nu\Sigma_f(x)\Phi(x) = 0$$

z warunkami brzegowymi $\Phi(0) = 0$, $\Phi(a) = 0$.

- Zamieniamy problem na samozgodny

$$-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d\Phi(x)}{dx} + \Sigma_a(x)\Phi(x) = \frac{1}{\lambda}\nu\Sigma_f(x)\Phi(x) \equiv S(x) \quad *$$

gdzie λ to nieznaną stałą.

- W rozwiązaniu zgadujemy początkowe $\Phi_1(x)$ i λ_1 , wyliczamy prawą stronę równania $S_1(x)$.

- 1 Rozwiązując zagadnienie $A\Phi = S$ (gdzie A to operator lewej strony równania) dostajemy nowe rozwiązanie Φ_2 .
- 2 Wyznaczamy λ_2

$$\lambda_2 = \frac{S_1(x)\lambda_1}{\nu\Sigma_f(x)\Phi_2(x)}$$

- 3 Z λ_2 i Φ_2 wyznaczamy S_2
- 4 Powtarzamy, aż $\lambda_{i+1} - \lambda_i < \epsilon$ gdzie ϵ to z góry założona dokładność rozwiązania

Rozwiązanie numeryczne równania dyfuzji

- Numeryczne rozwiązanie wymaga dyskretyzacji przestrzeni. Będziemy szukać rozwiązania w pewnych punktach x_0, x_1, \dots, x_n . W ogólności odległości między punktami mogą być różne (zasadniczo należy je tak dobrać, aby $\Delta_i < L_i$). Na razie przyjmijmy równoodległe punkty Δ .
- Szukanym rozwiązaniem jest zbiór wartości $\Phi(x_i) \equiv \Phi_i$
- Wyrazy w równaniu \star zamienimy na średnie wartości w otoczeniu poszczególnych punktów $x_i \pm \Delta/2$

$$\Sigma_a(x)\Phi(x) \approx \Sigma_{ai}\Phi_i$$

$$\frac{1}{\lambda} \nu \Sigma_f(x)\Phi(x) \approx \frac{1}{\lambda} \nu \Sigma_{fi}\Phi_i$$

$$\frac{d}{dx}D(x)\frac{d\Phi(x)}{dx} \approx \frac{1}{2}(D_i + D_{i+1})\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta^2} - \frac{1}{2}(D_{i-1} + D_i)\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta^2}$$

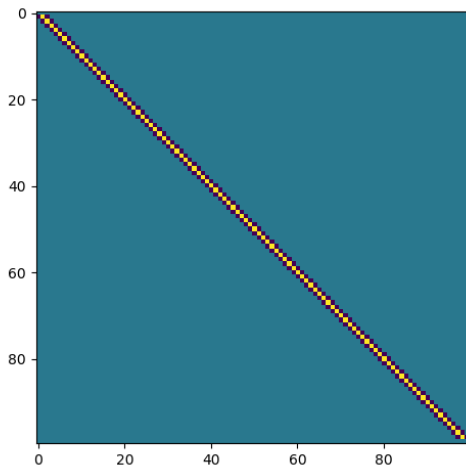
- Jak widać strumień w punkcie i jest zależny jedynie od strumienia w sąsiednich punktach $i \pm 1$
- W rezultacie nasz operator lewej strony równania - macierz A - działający na wektor Φ , ma niezerowe wyrazy jedynie na głównej przekątnej oraz bezpośrednio nad i pod nią

$$a_{i,i} = \Sigma_{ai} + \frac{D_{i-1} + 2D_i + D_{i+1}}{2\Delta^2}$$

$$a_{i,i-1} = -\frac{D_i + D_{i-1}}{2\Delta^2}$$

$$a_{i,i+1} = -\frac{D_{i+1} + D_i}{2\Delta^2}$$

Macierz problemu 1D



Rozwiązanie numeryczne równania dyfuzji 2D

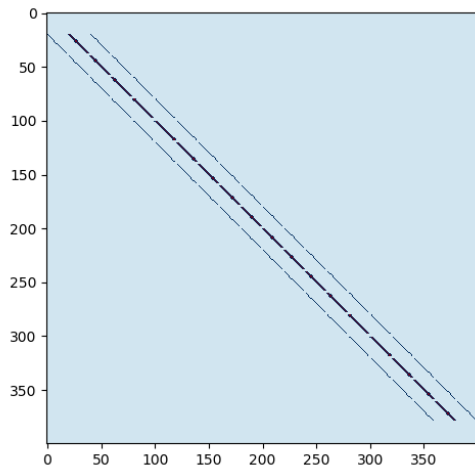
W przestrzeni dwuwymiarowej procedura wygląda analogicznie

- Dokonujemy podziału odcinka $(0, a)$ wzdłuż x co Δ_x , oraz $(0, b)$ wzdłuż y co Δ_y .
Otrzymujemy punkty $x_{0,0}, x_{0,1}, x_{1,0}, \dots, x_{n,m}$.
- Szukanym rozwiązaniem jest zbiór wartości $\Phi(x_i, x_j) \equiv \Phi_{i,j}$
- Główną różnicą jest wyraz

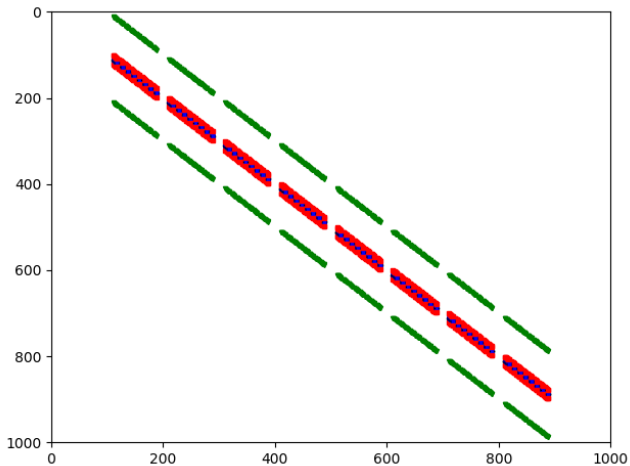
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} D(x) \frac{d\Phi(x)}{dx} &\approx \Phi_{i-1,j} \frac{(D_{i-1,j} + D_{i,j})}{2\Delta_x^2} + \Phi_{i+1,j} \frac{(D_{i,j} + D_{i+1,j})}{2\Delta_x^2} \\ &+ \Phi_{i,j-1} \frac{(D_{i,j-1} + D_{i,j})}{2\Delta_y^2} + \Phi_{i,j+1} \frac{(D_{i,j} + D_{i,j+1})}{2\Delta_y^2} \\ &- \Phi_{i,j} \frac{D_{i-1,j} + 2D_{i,j} + D_{i+1,j}}{2\Delta_x^2} - \Phi_{i,j} \frac{D_{i,j-1} + 2D_{i,j} + D_{i,j+1}}{2\Delta_y^2} \end{aligned}$$

- Strumień w punkcie i, j jest zatem zależny od strumienia w sąsiednich punktach $i \pm 1, j \pm 1$
- Jeżeli punkty (i, j) ułożymy teraz w kolejności $k = i + jn$, to znowu dostaniemy dwuwymiarową macierz operatora A , ale dodatkowe niezerowe wyrazy pojawiają się na dwóch przekątnych poniżej i poniżej głównej.
- Podobne rozumowanie dla problemu 3D wprowadzi kolejne dwie niezerowe przekątne.

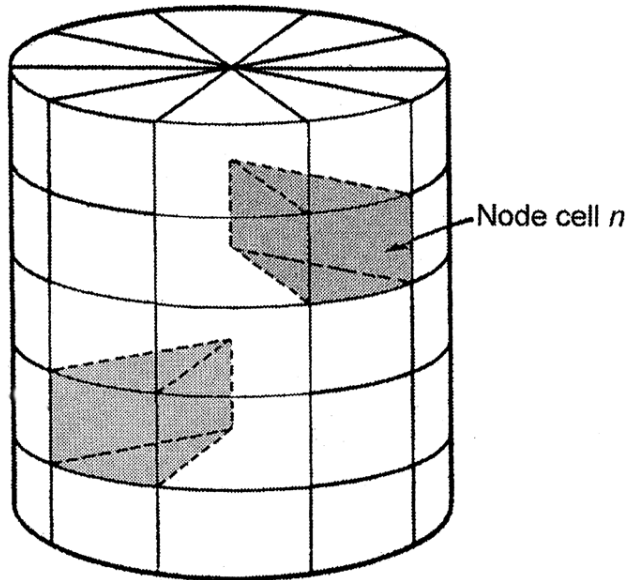
Macierz problemu 2D



Macierz problemu 3D



Metoda węzłów

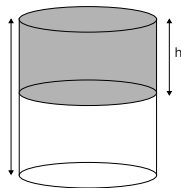
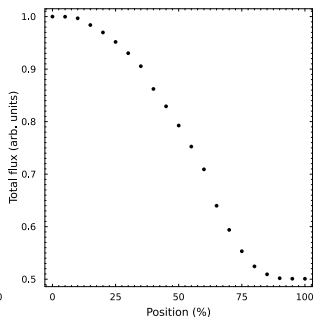
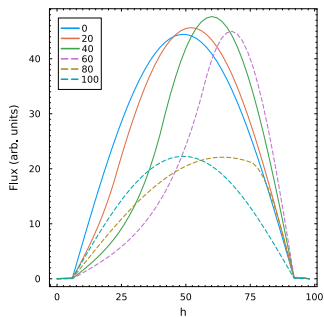


Problem 4

Rozwiązać numerycznie wybrane zagadnienie (jedno lub więcej wymiarowe).
Przykładowe problemy

- a) Zależność strumienia od sposobu ułożenia paliwa w warstwy mniej i bardziej wzbogacone
- b) Reaktor z reflektorem i bez
- c) Zbieżność rozwiązania numerycznego (porównanie wyników kolejnych iteracji) dla jednorodnego reaktora)

Przykład



Profil strumienia neutronów w zależności od położenia prętów (w % wysokości reaktora), oraz całkowity strumień neutronów wyznaczony w numerycznym rozwiązaniu modelu dyfuzji.