

Rachunek różniczkowy i całkowy 2016/17

Zadania domowe w pakietach tygodniowych

Tydzień 1 — 3-7.10.2016

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O1.1

Czy dla wszelkich zbiorów A , B i C zachodzą następujące równości:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C),$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Zadanie O1.2

Sprawdzić, czy następujące zdania są tautologiami:

$$[(p \vee q) \wedge \bar{p}] \Rightarrow q,$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)],$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q].$$

Zadanie O1.3

Dowieść indukcyjnie, że

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right].$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D1.1

Czy dla wszelkich zbiorów A , B i C zachodzi następująca równość:

$$A \cup (B \setminus C) = [(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C).$$

Zadanie D1.2

Sprawdzić, czy następujące zdanie jest tautologią:

$$p \Rightarrow (\bar{p} \vee q).$$

Zadanie D1.3

Jakie musi być k , żeby dla wszystkich n spełniony był wzór

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+k)}{12}.$$

Tydzień 2 — 10-14.10.2016

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O2.1

Rozwiązać równanie (najlepiej, nie rozwiązując go)

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x(x+1)} + \arcsin\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Wbrew pozorom jest to prosty problem, jeśli zaczniemy od wyznaczenia dziedziny.

Zadanie O2.2

Funkcja tangens hiperboliczny zdefiniowana jest wzorem

$$\operatorname{tgh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Znaleźć funkcję odwrotną $\operatorname{tgh}^{-1}x$ i określić jej dziedzinę.

Zadanie O2.3

Korzystając z równości $|x| = \sqrt{x^2}$ oraz ze związków trygonometrycznych:

a) Wyrazić $|\sin x|$ przez $\operatorname{ctg}x$.

b) Rozwiązać równanie

$$\sin x = \sin(2x).$$

c) Wykazać, że

$$\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2x^2,$$

i określić zbiór wartości x , dla których powyższa równość zachodzi.

Zadania dodatkowe.

Zadanie D2.1

Pokazać, że funkcje

$$f(x) = x^2 - x + 1 \quad \text{ i } \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$$

są funkcjami wzajemnie do siebie odwrotnymi, tj. że zachodzą równości

$$f(\varphi(x)) = x \quad \text{ i } \quad \varphi(f(x)) = x.$$

Sprawdzić dziedziny! Wykorzystując ten fakt znaleźć rozwiązania równania

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}},$$

najlepiej nie rozwiązując go, ale zastępując go prostszym!

Zadanie D2.2

Niech

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2, & \text{dla } x < 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0, \\ \operatorname{ctgh}(x), & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Znaleźć $f^{-1}(x)$ i określić dziedzinę i zbiór wartości dla $f(x)$ oraz $f^{-1}(x)$. Narysować wykresy tych funkcji.

Zadanie D2.3

Rozwiązać równania

1.

$$3^{2x+1} = 5^x,$$

2.

$$9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Posłużyć się logarytmem o podstawie e.

Tydzień 3 — 17-21.10.2016

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O3.1

Wyznaczyć granice ciągów:

$$a_n = (2^n + \pi^n + 3^{n+1})^{1/n}, \quad b_n = 2^{-n} \sin(n^2 \pi).$$

Zadanie O3.2

Wykazać, że 0 jest granicą ciągów:

$$a_n = \frac{n5^n}{2^n 3^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\exp\left(\frac{n \ln n}{103}\right)}}$$

Zadanie O3.3

Wyznaczyć granice ciągów:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 + \cos(n)}$$

Zadanie O3.4

Wyznaczyć granicę ciągu (podobnie jak na wykładzie):

$$a_n = \frac{\sqrt{n+7} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+9}}.$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D3.1

Wyznaczyć granice ciągów:

$$a_n = (e^n + 2^{n+1000})^{1/n}, \quad b_n = \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n+100}.$$

Zadanie D3.2

Wyznaczyć granice ciągów:

$$b_n = (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1})\sqrt{n}, \quad c_n = n[\ln(n) - \ln(n+2)]$$

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O4.1

Funkcje

$$f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad f(x) = \frac{1 - \cos^3(\pi x)}{x^2}$$

są nieokreślone dla $x = 0$. Określić $f(0)$ tak, aby funkcje te były ciągłe dla $x = 0$.

Zadanie O4.2

Funkcję $f(x)$ określono równaniami

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2} & \text{dla } x \in \mathbb{R} - \{-\pi/2, \pi/2\} \\ a & \text{dla } x = -\pi/2 \\ b & \text{dla } x = \pi/2 \end{cases}$$

Dla jakich liczb a i b jest to funkcja ciągła na całej osi rzeczywistej.

Zadanie O4.3

Określić asymptoty następujących funkcji:

$$y = \frac{5x}{x-3}, \quad y = \frac{3x}{x-1} + 3x.$$

Zadanie O4.4

Wyznaczyć granice funkcji:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+3} \right).$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D4.1

Funkcje

$$f(x) = x \operatorname{ctg} x, \quad f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

są nieokreślone dla $x = 0$. Określić $f(0)$ tak, aby funkcje te były ciągłe dla $x = 0$.

Zadanie D4.2

Funkcję $g(x)$ określono równaniami

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) - 1}{x^2} & \text{dla } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ c & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Dla jakiej liczby c jest to funkcja ciągła na całej osi rzeczywistej.

Zadanie D4.3

Określić asymptoty następujących funkcji:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad y = \sqrt{1 + x^2} + 2x.$$

Zadanie D4.4

Wyznaczyć granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1},$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ dla $n, m \in \mathbb{N}.$

Tydzień 5 i 6 – 2-10.11.2016

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O5.1

Korzystając z reguł de L'Hospital'a, wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

Aby ograniczyć ilość liczonych pochodnych, warto jest to wyrażenie trochę przekształcić.

Zadanie O5.2

Przez zbadanie funkcji rozumie się na ogół wykonanie następujących czynności:

- Określenie dziedziny.
- Sprawdzenie, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta lub okresowa.
- Sprawdzenie ciągłości funkcji i ewentualnie wyznaczenie punktów nieciągłości.
- Wyznaczenie asymptot wykresu tej funkcji.
- Wyznaczenie punktów ekstremalnych.
- Wyznaczenie punktów przegięcia.
- Naszkicowanie wykresu.

Zbadać funkcję

$$f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$$

Zadanie O5.3

Wyznaczyć punkty, w których styczne do sinusoidy $y = \sin x$ są równoległe do prostej $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Zadanie O5.4

Krzywa, po której porusza się punkt materialny zadana jest parametrycznie równaniami $x = a \cos t$ i $y = b \sin t$. Wykazać, że krzywa jest elipsą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wyznaczyć pochodną dy/dx jako funkcję parametru t .

Zadania dodatkowe.

Zadanie D5.1

Korzystając z reguły de L'Hospital'a, wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/(2a))}.$$

Przyjąć, że jest to granica lewostronna, tj. $x < a$. Zauważmy, że pojawia się tu nieoznaczoność typu 1^∞ .

Zadanie D5.2

Zbadać funkcję

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Zadanie D5.3

Wyznaczyć punkty, w których proste prostopadłe do kosinusoidy $y = \cos x$ są równoległe do prostej $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x$.

Zadanie D5.4

Krzywa, po której porusza się punkt materialny zadana jest parametrycznie równaniami $x = a \cosh t$ i $y = b \sinh t$. Wykazać, że krzywa jest hiperbolą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wyznaczyć pochodną dy/dx jako funkcję parametru t .

Tydzień 7 – 14-18.11.2016

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O7.1

Bez zbyteńnego wysiłku wyznaczyć $(n-1)$ -szą i n -tą pochodną (tj. $f^{(n-1)}(x)$ i $f^{(n)}(x)$) funkcji

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{1 - x},$$

określonej dla $x \neq 1$.

Zadanie O7.2

Wyznaczyć pochodną funkcji uwikłanej

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x + y}{2}.$$

Zadanie O7.3

Wyznaczyć rozwinięcie Taylora z dokładnością do x^8 funkcji

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Zadanie O7.4

Korzystając z rozwinięcia Taylora przedstawić wielomian $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ jako wielomian w potęgach $x - 1$.

Zadania dodatkowe.

Zadanie D7.1

Zadane są dwie parabole $y_1 = x^2 + 9$ i $y_2 = -x^2 + 1$.

1. Znaleźć równanie stycznej do paraboli $y_1 = x^2 + 9$ w punkcie $(1, 10)$.
2. Istnieją dwie proste, które będą styczne do obu parabol równocześnie. Podać ich równania.

Zadanie D7.2

Wyznaczyć pochodną funkcji uwikłanej

$$x^3 + xy + y^3 = 0.$$

Zadanie D7.3

Wyznaczyć rozwinięcie Taylora z dokładnością do x^6 funkcji

$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Zadanie D7.4

Korzystając z rozwinięcia Taylora funkcji $(1+x)^\alpha$, wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}.$$

Tydzień 8 – 21-25.11.2016

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O8.1

Wyznaczyć całki nieoznaczone

$$\int e^x(x^3 - 2x^2 + x - 2) dx, \quad \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx.$$

Zadanie O8.2

Obliczyć całki nieoznaczone

$$\int e^{-x} \sin x dx, \quad \int e^{-x} \cos x dx.$$

Wykonać dwa razy całkowanie przez części.

Zadanie O8.3

Rozłożyć funkcje podcałkowe na ułamki proste i wyznaczyć całki

$$\int dx \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \int dx \frac{x^2 + 10}{x^3 - 2x^2 + 5x}.$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D8.1

Obliczyć całki nieoznaczone

$$\int e^{-2x} \cosh x dx, \quad \int e^{-2x} \sinh x dx.$$

Zadanie D8.2

Obliczyć całki nieoznaczone

$$\int e^x \cos(5x) dx, \quad \int e^{-2x} \sin(3x + 2) dx.$$

Wykonać dwa razy całkowanie przez części.

Zadanie D8.3

Rozłożyć funkcje podcałkowe na ułamki proste i wyznaczyć całki

$$\int dx \frac{1}{x(x^2 + 2)}, \quad \int dx \frac{1}{x^4 - a^4}.$$

Tydzień 9 – 28.11-2.12.2016

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O9.1

Wiadomo z tabelki, że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C = -\ln(-x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

Wyprowadzić ten wynik stosując podstawienie Eulera $\sqrt{1+x^2} = u + x$.

Zadanie O9.2

Rozbić na ułamki proste funkcję

$$\frac{x-1}{x^2-2x-3},$$

a następnie wyznaczyć jej funkcję pierwotną.

Zadanie O9.3

Obliczyć całkę

$$\int dx x^2 e^{-x} \sin(5x).$$

Zadanie O9.4

Korzystając z podstawienia Eulera obliczyć całkę

$$\int dx \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D9.1

Wiadomo z tabelki, że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C = -\ln(-x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

Wyprowadzić ten wynik stosując podstawienie Eulera $\sqrt{1+x^2} = 1 + vx$.

Zadanie D9.2

Rozbić na ułamki proste funkcję

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)},$$

a następnie wyznaczyć jej funkcję pierwotną.

Zadanie D9.3

Obliczyć całki

$$\int dx x e^{-2x} \cos(2x), \quad \int dx \frac{1}{\sin^2 x \cos x}, \quad \int dx \frac{\sin^3 x}{\cos x}.$$

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O10.1

Obliczyć całki:

$$\begin{aligned} a) \quad & \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx, & b) \quad & \int_0^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx, \\ c) \quad & \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx, & d) \quad & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx. \end{aligned}$$

Zadanie O10.2

Wyznaczyć pole figur ograniczonych krzywymi:

$$\begin{aligned} a) \quad & y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{x^2 + 4}, \\ b) \quad & y = 2x - x^2, \quad x + y = 0. \end{aligned}$$

Zadanie O10.3

Obliczyć długość krzywych:

$$\begin{aligned} a) \quad & 9y^2 = 4x^3, \quad 0 \leq x \leq 3, \\ b) \quad & \text{lini łańcuchowej } y = a \cosh \frac{x}{a}, \quad -a \leq x \leq a, \\ c) \quad & x = t^2, \quad y = t - t^3/3, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D10.1

Wykazać, że dla bardzo dużych x funkcja $f(x)$ określona całką

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \quad \text{zachowuje się jak} \quad f(x) \sim \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

Zadanie D10.2

Obliczyć całkę

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx.$$

Zadanie D10.3

Obliczyć pole figury leżącej w pierwszej ćwiartce i ograniczonej krzywymi $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ i $x^2 + y^2 = 5$.

Zadanie D10.4

Obliczyć długość krzywej logarytmicznej $y = \ln x$ w przedziale $\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O11.1

Wykazać, że całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\ln x}{1+x^2}$$

istnieje. Następnie obliczyć tę całkę dzieląc obszar całkowania $(0, \infty)$ na dwa obszary $(0, 1]$ i $[1, \infty)$, a następnie dokonując zamiany zmiennych $t = 1/x$ w całce po jednym z tych obszarów.

Zadanie O11.2

Lemniskata Geron jest zamkniętą krzywą płaskąadaną równaniem

$$x^4 - x^2 + y^2 = 0.$$

Znaleźć pole powierzchni jednego liścia lemniskaty.

Zadanie O11.3

Dla jakich wartości parametrów p i q całka niewłaściwa (funkcja beta Eulera)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

istnieje?

Zadania dodatkowe.

Zadanie D11.1

Obliczyć całki niewłaściwe:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx.$$

Zadanie D11.2

Obliczyć całki niewłaściwe:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O12.1

Stosując kryterium d’Alamberta zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Zadanie O12.2

Stosując kryterium Cauchy’ego zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 \arctg(n^2 + 1)/5)^n.$$

Zadanie O12.3

Stosując kryterium całkowite zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}.$$

Zadanie O12.4

Zbadać zbieżność szeregu naprzemiennego (kryterium Leibnitza)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n + 100}{3n + 1} \right)^n.$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D12.1

Stosując kryterium d’Alamberta zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}.$$

Zadanie D12.2

Stosując kryterium Cauchy’ego zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} 2^n.$$

Zadanie D12.3

Stosując kryterium całkowe zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Zadanie D12.4

Zbadać zbieżność szeregu naprzemiennego (kryterium Leibnitza)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O13.1

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} - \sqrt{1-y^2} = 0 \quad .$$

Zadanie O13.2

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania liniowego, niejednorodnego

$$x\frac{dy}{dx} = x + y,$$

a następnie wyznaczyć stałą całkowania z warunku początkowego $y(x=0) = 2$.

Zadanie O13.3

Rozwiązać równania różniczkowe

$$a) \frac{dy}{dx} = (x+y)^2, \quad b) (x+y)\frac{dy}{dx} + x - y = 0.$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D13.1

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \quad .$$

Zadanie D13.2

Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x^2}{2}.$$

Zadanie D13.3

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$(4x - 2y + 3)\frac{dy}{dx} = y - 2x.$$

Tydzień 14 — 16-20.01.2017

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O14.1

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$y'' + 4y = \sin(3x).$$

Zadanie O14.2

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$y'' + 2y' + 5y = x^2 + x + 1.$$

Zadanie O14.3

Sprawdzić, czy pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ są równe dla następujących funkcji

$$a) \quad f(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad b) \quad f(x, y) = (\sin x)^{\ln y}.$$

Zadania dodatkowe.

Zadanie D14.1

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$y'' + 3y' + 2y = 2x + 1.$$

Zadanie D14.2

Znaleźć rozwiązanie równania

$$y^4 + y^3 y'' = 1.$$

Zadanie D14.3

Wykazać, że funkcja $u = \ln(e^x + e^y)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

Tydzień 15 — 23-27.01.2017

Zadania obowiązkowe.

Zadanie O15.1

Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

ma granice iterowane $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ i $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$, ale nie ma granicy podwójnej w zerze.

Zadanie O15.2

Zbadać ekstrema funkcji

$$a) f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y - 2, \quad b) f(x, y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y.$$

Zadanie O15.3

Zamienić kolejność całkowania w całce

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} dy f(x, y).$$

Zadanie O15.4

Wykazać, że

$$\int_{x^2+y^2 < a^2} dx dy \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{3} \pi a^3.$$