

Rachunek różniczkowy i całkowy 2016/17

Zadania na ćwiczenia w pakietach tygodniowych

Tydzień 1 — 3-7.10.2016

Elementy teorii zbiorów.

Zbiory oznaczamy dużymi literami łacińskimi (mogą być indeksy): $A, B, C, D_1, \dots$. Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\emptyset$, a zbiór wszystkich elementów symbolem Ω . Elementy zbiorów na ogół oznaczamy małymi literami łacińskimi (mogą być indeksy): $a, b, c, d_3, \dots$. Zapisy $a \in A$ lub $A \ni a$ oznaczają, że element a należy do zbioru A , a zapisy $a \notin A$ lub $A \not\ni a$ że nie należy do zbioru A . Dopełnienie zbioru A oznaczamy symbolem $\bar{A}$ i definiujemy jako zbiór takich elementów, które należą do Ω ale nie należą do A . Zapisujemy to symbolicznie:

$$\bar{A} = \{a : a \in \Omega \text{ i } a \notin A\} = \{a \in \Omega : a \notin A\}.$$

Część wspólną (iloczyn) i sumę zbiorów A i B definiujemy symbolicznie jako (kolejność jest nieistotna)

$$A \cap B = \{a \in \Omega : a \in A \text{ i } a \in B\},$$

$$A \cup B = \{a \in \Omega : a \in A \text{ lub } a \in B\}.$$

Różnice zbiorów A i B definiujemy jako zbiory (tu kolejność jest istotna)

$$A \setminus B = \{a \in \Omega : a \in A \text{ i } a \notin B\},$$

$$B \setminus A = \{a \in \Omega : a \in B \text{ i } a \notin A\}.$$

Możemy również stosować symbol $A - B$. Symbole $\subseteq$ i $\supseteq$ oznaczają zawieranie się zbiorów (zbiory mogą być równe). Jeśli zbiory nie są sobie równe to używamy symboli ostrych $\subset$ i $\supset$.

Relacje te ilustrujemy na tzw. diagramach Venna: zbiór Ω przedstawiamy jako prostokąt a zbiór jako dowolny (nawet niespójny, ale umówmy się dla prostoty, że spójny) 'kleks' w tym prostokącie.

Zadania obowiązkowe

Zadanie O1.1

Wykazać, że: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Zadanie O1.2

Wykazać prawa de Morgana:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Zadanie O1.3

Posługując się diagramami Venna sprawdzić słuszność prawa łączności:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

i prawa rozdzielności

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Jeśli idzie sprawnie, to również z zamianą miejscami $\cup$ i $\cap$. Jest to tzw. zasada dualności.

Elementy logiki.

Zdania, którym możemy przypisać wartość logiczną 0 (fałsz) lub 1 (prawda) oznaczamy małymi literami łacińskimi, zazwyczaj $p, q, r, s_1, \dots$. Podobnie jak dla zbiorów definiujemy negację zdania $\bar{p}$ (możemy również stosować oznaczenia $p', \sim p$), koniunkcję zdań $p \wedge q$ i alternatywę zdań $p \vee q$. Zdaniom takim przyporządkowujemy wartość logiczną według tabelki:

p	$\bar{p}$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1

Zadanie O1.4

Wartość logiczną implikacji zdań $p \Rightarrow q$ określamy tabelką (z fałszu może wynikać wszystko, a z prawdy może wynikać tylko prawda)

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Wykazać, że tę samą tabelkę spełnia zdanie $\bar{p} \vee q$.

Zadanie O1.5

W przypadku bardziej złożonych zdań czasami jest wygodniej połączyć się metodą algebraiczną, w której symbolom zdań przyporządkowujemy wartości liczbowe 0 lub 1. Sprawdzić poprawność następującej tabelki

zdanie	wartość algebraiczna
$\bar{p}$	$1 - p$
$p \wedge q$	pq
$p \vee q$	$p + q - pq$

Wykazać, że implikacji $p \Rightarrow q$ przypisujemy wartość algebraiczną $1 - p + pq$.

Zadanie O1.6

Zdania są równoważne, $p \Leftrightarrow q$, jeśli p i q mają te same wartości logiczne. Równoważność dwóch zdań spełnia zatem tabelkę

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wykazać, konstruując tabelkę, że równoważność ma tę samą wartość logiczną co zdanie $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Podać postać algebraiczną równoważności (odp.: $1 - p - q + 2pq$).

Zadanie O1.7

Wykazać, konstruując tabelkę lub stosując metodę algebriczną, słusność praw de Morgana dla zdań:

$$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$$

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$$

Zadanie O1.8

Tautologią nazywamy zdanie, które jest zawsze prawdziwe. Sprawdzić czy poniższe zdania są tautologiami:

$$p \vee \bar{p},$$

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q.$$

Zadanie O1.9

Omówić symbole i znaczenie kwantyfikatorów.

Zasada indukcji matematycznej.

Omówić zasadę indukcji matematycznej. Gdy w zadaniu pojawi się symbol sumy to mówić znaczenie notacji

$$\sum_{n=L}^N a_n \quad \text{i} \quad \prod_{n=L}^N a_n.$$

Zadanie O1.10

Stosując zasadę indukcji matematycznej wykazać, że

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \quad \text{dla } q \neq 1,$$

Zadanie O1.11

Zdefiniujmy dla naturalnych n i k takich, że $0 \leq k \leq n$, symbol kombinatoryczny (lub tzw. współczynnik dwumianowy) C_k^n wzorem

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

gdzie $n!$ jest silnią liczby naturalnej ($0! = 1$, $n! = (n-1)!n$). Wykazać (nie trzeba indukcji), że

$$C_{k+1}^{n+1} = C_{k+1}^n + C_k^n.$$

Skonstruować na podstawie tego wzoru trójkąt Pascala.

Dla ujemnych liczb całkowitych przyjmujemy, że jej silnia równa się nieskończoności ($-\infty$ dla nieparzystych n ujemnej, a $+\infty$ dla parzystych dodatniej). Fakt ten wygodniej jest zapisać jednym wzorem,

$$\frac{1}{n!} = 0, \quad \text{dla } n < 0.$$

Sprawdzić, że powyższy związek dla C_k^n obowiązuje dla dowolnych k .

Zadanie O1.12

Posługując się wynikiem z zadania poprzedniego wykazać indukcyjnie, że

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^k b^{n-k}.$$

Funkcje i ich wykresy.

Jeśli czas pozwoli, to powtórzcie krótko własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej, funkcji trygonometrycznych i odwrotnych i ich wykresy na płaszczyźnie. Poza tym wzory (BEZ dowodów) na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta, sinusa i kosinusa sumy kątów, przypomnieć miarę kąta płaskiego: związek radianów ze stopniami. Jeśli nie zdążycie tego zrobić, to zacząć następny tydzień od tych rzeczy.

Zadania dodatkowe

Zadanie D1.1

Udowodnić indukcyjnie równości:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Zadanie D1.2

Posługując się metodą algebraiczną, sprawdzić czy poniższe zdania są tautologiami:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \bar{q})] \Leftrightarrow \bar{p}$$

$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

Zadanie D1.3

Udowodnić równość zbiorów posługując się rachunkiem zdań:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$A \cup (B \setminus C) = [(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C)$$

Tydzień 2 — 10-14.10.2016

Funkcje i ich wykresy.

Zadania obowiązkowe

Zadanie O2.1

Naszkicować wykresy następujących funkcji w zaznaczonych przedziałach:

1. $y = x(1 - x)$, dla $-1 \leq x \leq 2$,
2. $y = |x| + |x - 3|$, dla $-3 \leq x \leq 4$.

Zadanie O2.2

Wyznaczyć proste przechodzące przez pary następujących punktów:

1. $(1, 1)$ i $(-1, 5)$,
2. $(0, 1)$ i $(2, 1)$,
3. $(2, 1)$ i $(-1, -1)$.

Naszkicować trójkąt utworzony przez te trzy proste i wyznaczyć długości każdego z jego boków.

Zadanie O2.3

Wyznaczyć punkty przecięcia następujących okręgów i linii prostych:

1. $x^2 + y^2 = 8$ i $x = 2$,
2. $x^2 + y^2 = 1$ i $x + y = \sqrt{2}$.

Zadanie O2.4

Rozwiąż następujące nierówności:

1. $|2x - 3| < 1$,
2. $(x - 2)^2 \geq 4$.

Zadanie O2.5

Wyznaczyć x , dla którego $y = 3x^2 + 5x - 1$ osiąga minimalną wartość. Koniecznie posłużyć się metodą uzupełniania do pełnego kwadratu.

Zadanie O2.6

Pokazać, że dla każdego x funkcja $f(x) = x^3 + 3x + 5$ jest funkcją rosnącą; czyli, że jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$. W tym celu wykazać, że

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \left[\frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2) + 3 \right].$$

Przy okazji przedyskutować wzory skróconego mnożenia: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Zadanie O2.7

Wyznaczyć największą wartość funkcji (uzupełniać do pełnego kwadratu)

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}.$$

Zadanie O2.8

Które z poniższych funkcji są parzyste, a które nieparzyste:

1. $f(x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x$;
2. $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;
3. $f(x) = (1 + a^{kx})/(1 - a^{kx})$;

Zadanie O2.9

Niech

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Wykazać, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ spełniona jest tożsamość funkcyjna

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right).$$

Zadanie O2.10

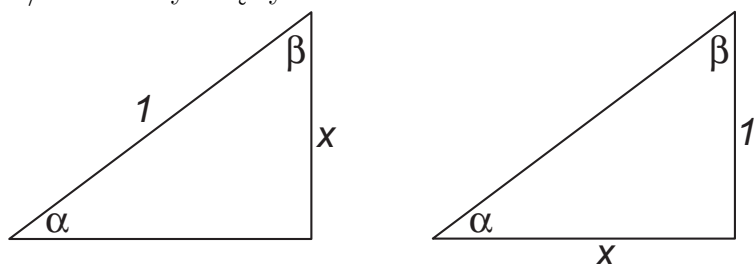
Wyznaczyć okresy funkcji $\operatorname{tg}(2x)$, $\operatorname{ctg}(x/2)$.

Zadanie O2.11

Udowodnić, że jeśli $f(x)$ jest funkcją okresową o okresie T , to $f(ax + b)$, $a > 0$, jest również funkcją okresową. Wyznaczyć jej okres.

Zadanie O2.12

Wyprowadzić zależności $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, $\operatorname{arctg}(1/x) = \operatorname{arcctg} x$ i $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$. Posłużyć się rysunkami.



Zadanie O2.13

Wielkości $A > 0$, ω i φ występujące w funkcji $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ nazywamy odpowiednio amplitudą, częstością i fazą. Wyznaczyć je dla funkcji $f(t) = 3 \sin(t/2) + 4 \cos(t/2)$.

Zadania dodatkowe

Zadanie D2.1

Naszkicować wykresy następujących funkcji w zaznaczonych przedziałach:

1. $y = x^4$, dla $-1.5 \leq x \leq 1$,
2. $y = |x - 1|$, dla $-3 \leq x \leq 3$,

Zadanie D2.2

Rozwiąż następujące nierówności (uzupełniać do pełnego kwadratu):

1. $x^2 + 2x - 8 \leq 0$,
2. $(x - 2)^4 - 16 > 0$.

Zadanie D2.3

Czym jest prostokąt o zadanym obwodzie $2p$, którego pole jest maksymalne?

Zadanie D2.4

Na płaszczyźnie (x, t) naszkicować wykresy następujących funkcji:

1. $x(t) = \theta(t + 1) - \theta(t - 1)$, dla $-2 \leq t \leq 2$,
2. $x(t) = t\theta(t - 1)$, dla $0 \leq t \leq 2$,
3. $x(t) = (t^2 - 1)[\operatorname{sgn}(t + 1) + \operatorname{sgn}(1 - t)]$, dla $-2 \leq t \leq 2$,

gdzie tzw. funkcja skoku $\theta(t)$ i funkcja znaku $\operatorname{sgn}(t)$ są zdefiniowane następująco:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla } t < 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

Zadanie D2.5

Które z poniższych funkcji są parzyste, a które nieparzyste:

1. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;
2. $f(x) = x^2 - |x|$;
3. $f(x) = x \sin^2 x - x^3$;
4. $f(x) = (1 + 2^x)^2 / 2^x$.

Zadanie D2.6

Niech

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} - 1, & \text{dla } -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{tg}(x/2), & \text{dla } 0 \leq x < \pi, \\ x/(x^2 - 2), & \text{dla } \pi \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Wyznaczyć $f(-1)$, $f(\pi/2)$, $f(2\pi/3)$, $f(4)$, $f(6)$.

Zadanie D2.7

Niech $\varphi(x) = x^2$ i $\psi(x) = 2^x$. Określić $\varphi[\psi(x)]$ i $\psi[\varphi(x)]$.

Zadanie D2.8

Wyznaczyć okresy funkcji $\sin(2\pi x)$, $|\cos(x)|$ i $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Zadanie D2.9

Udowodnić, że funkcja $f(x) = \cos x^2$ nie jest funkcją okresową.

Zadanie D2.10

Przy zadanych n liczbach $a_1, a_2, \dots, a_n$ wyznaczyć wartość x , dla którego funkcja

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2$$

osiąga minimum. Posłużyć się metodą uzupełniania do pełnego kwadratu. Można wybrać konkretną wartość na n , np. $n = 3$.

Zadania obowiązkowe

Funkcje: składanie i odwracanie.

Zadanie O3.1

Zdefiniujmy funkcję $f(x) = (x+1)/(x-1)$. Wyznaczyć funkcje $f^{-1}(x^2)$, $g(x) = f(f^{-1}(x^2))$ i $h(x) = f(f(x^2))$ oraz ich dziedziny.

Zadanie O3.2

Odwrócić funkcję $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $a > 0$, $a \neq 1$, i wyrazić ją poprzez sinus hiperboliczny. Logarytm wyjątkowo jest przy podstawie a .

Zadanie O3.3

Wykazać, że

1.

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

2.

$$\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

i określić zbiór wartości x , dla których ta równość zachodzi.

Granice ciągów.

Zadanie O3.4

Korzystając z definicji granicy ciągu wykazać, że

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ dla $x_n = (3^n + 1)/(3^n + 4)$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ dla $x_n = (5n^2 + 6n)/(5n^2 - 3)$

Zadanie O3.5

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granicę ciągu

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

Zadanie O3.6

Wyznaczyć granice ciągów, korzystając z twierdzeń o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2 + n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 4n + 3}{2n^3 + 3n + 4}.$$

Zadanie O3.7

Wyznaczyć granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+4}}.$$

Skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia w postaci $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (a - b)/(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.**Zadanie O3.8**

Wyznaczyć granice ciągów:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n)$

Zadania dodatkowe**Zadanie D3.1**

Wykazać, że

1. $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2x^2$
2. $\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $2\arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$

i określić zbiór wartości x , dla których ta równość zachodzi.**Zadanie D3.2**

Wyznaczyć granice ciągów:

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+5n+4}{2+n^2}$ | b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-4n+3}{8n^3+3n+4}$ |
| c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+n}{4n^2+7}\right)^3$ |

Zadanie D3.3

Wyznaczyć granice ciągów:

$$a_n = (2^n + 3^n + 7^n)^{1/n}, \quad b_n = 2^{-n} a \cos(n\pi), \quad c_n = \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n}$$

Zadanie D3.4

Wyznaczyć granice ciągów:

$$b_n = (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1})\sqrt{n}, \quad c_n = n[\ln(n) - \ln(n+2)].$$

Zadania extra**Zadanie E3.1**

Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji

1. $y = 5^{\ln x}$
2. $y = 2^{x(x-1)}$
3. $y = (1-x)/(1+x)$

Zadanie E3.2

Korzystając z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać, że dla $a > 0$ ciąg

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \dots, x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}, \dots$$

ma granicę i wynosi ona $(\sqrt{4a+1} + 1)/2$.

Zadanie E3.3

Wykazać, że ciąg

$$x_n = \cos \frac{n^2 \pi}{n+2}$$

nie ma granicy.

Zadanie E3.4

Wykazać, że 0 jest granicą ciągów:

$$a_n = \frac{n5^n}{2^n 3^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

Zadanie E3.5

Zdefiniujmy dwa ciągi dla dodatnich liczb $a < b$:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

Wykazać, że $x_n \leq y_n$ oraz, że ciąg x_n jest ciągiem monotonicznie rosnącym, a ciąg y_n monotonicznie malejącym. Zatem z odpowiedniego twierdzenia (wykład lub ćwiczenia) ciągi te mają granicę. Wykazać, że ich granicą jest ta sama liczba. Jest to tzw. średnia arytmetyczno-geometryczna, wykorzystywana np. w analizie numerycznej do wyznaczania niektórych funkcji specjalnych.

Zadania obowiązkowe

Szereg geometryczny.

Zadanie O4.1

Na wykładzie pokazałem, że $a^n \rightarrow 0$ dla $|a| < 1$. Wykazać, że sumą nieskończonego szeregu geometrycznego o ilorazie q i pierwszym wyrazie równym 1 jest liczba $1/(1-q)$, gdy $|q| < 1$.

Zadanie O4.2

Wyznaczyć sumy następujących szeregów geometrycznych:

1. $\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r$,
2. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} \dots$

Granica funkcji

Zadanie O4.3

Wyznaczyć granice funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x+9}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right).$$

Zadanie O4.4

Wyznaczyć granice funkcji korzystając z podstawień:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$, $26+x = z^3$. Wynik: 54;

Zadanie O4.5

Wyznaczyć granice funkcji

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^{7x}$

Zadanie O4.6

Dedefiniować funkcje w punkcie $x = 0$ tak, aby otrzymać funkcję ciągłą:

1. $f(x) = \frac{5x^2-3x}{x}$,
2. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,
3. $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Zadanie O4.7

Czy funkcja $f(x) = x^3/4 - \sin(\pi x) + 3$ przyjmuje wartość $7/3$ na odcinku $[-2, 2]$?

Zadanie O4.8

Wyznaczyć stałe a i b z warunku (wspomnieć o asymptotach):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

Zadania dodatkowe

Zadanie D4.1

Niech A , c , t_0 i T będą dowolnymi stałymi. Zdefiniujmy funkcję $f(t) = A e^{ct}$. Wykazać, że ciąg

$$f(t_0), f(t_0 + T), f(t_0 + 2T), \dots, f(t_0 + nT), \dots$$

jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie D4.2

Wyznaczyć sumy następujących szeregów geometrycznych:

1. $\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)^r,$
2. $\sum_{r=0}^{\infty} e^{-r},$

Zadanie D4.3

Wyznaczyć granice funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + a^2}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x\sqrt{x^2 + a^2},$$

dla dowolnych rzeczywistych a .

Zadanie D4.4

Wyznaczyć granice funkcji korzystając z podstawień:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}, \quad 1+x = z^5. \text{ Wynik: } 1/5;$
2. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}, \quad x - \pi/6 = z. \text{ Wynik: } 1.$

Zadanie D4.5

Dedefiniować funkcje w punkcie $x = 0$ tak, aby otrzymać funkcję ciągłą:

1. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x};$
2. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}.$

Zadanie D4.6

Wyznaczyć stałe a i b z warunku:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0.$

Zadanie D4.7

Korzystając z ciągłości funkcji $f(x) = 2^x - 1/x$ na odcinku $[1/4, 1]$ wykazać, że równanie $x 2^x = 1$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie mniejsze od 1.

Zadania obowiązkowe

Pochodne i ich zastosowania.

Zadanie O5.1

Wykazać, posługując się definicją pochodnej, że dla funkcji $\sqrt[5]{x^3}$ nie istnieje pochodna w punkcie $x = 0$.

Zadanie O5.2

Wyznaczyć pochodne funkcji:

1. $3 \cos x + 2 \sin x$;
2. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;
3. $(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$;
4. $2e^x + \ln x$;
5. $x^3 \arcsin x$;
6. $\sqrt{x} + 1/\sqrt{x} + 0.1x^{10}$;
7. $\ln(\operatorname{tg} x)$;
8. $\ln^6[\operatorname{tg}(3x)]$;
9. $\operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x)$;
10. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

Zadanie O5.3

Korzystając z tzw. pochodnej logarytmicznej,

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

wyznaczyć pochodne funkcji

1. $f(x) = a^x$,
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$.

Zadanie O5.4

Napisać równanie stycznej i równanie prostej prostopadłej do krzywej $y = f(x)$ we wskazanym punkcie x_0 jeśli

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ i $x_0 = 2$;

Zadanie O5.5

Znaleźć punkty na krzywej $y = x^3 - 3x + 5$, w których styczna:

1. jest prostopadła do linii $y = -x/9$;

Zadanie O5.6

Niech $f(x) = 3x^2 - 5$. Wyznaczyć ξ z przedziału $a < \xi < b$, spełniające formułę Lagrange'a $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ jeśli $a = -2$ i $b = 0$.

Zadanie O5.7

Korzystając z reguł de L'Hospitala wyznaczyć granice:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos(3x) - e^{-x}};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{\ln \cos(2x^2 - x)};$

Zadanie O5.8

Wyznaczyć ekstrema funkcji (jeśli można, to również punkty przegięcia):

1. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7;$

Posługujemy się jedynie pierwszą pochodną i jej znakiem przed i po punkcie stacjonarnym.

Zadanie O5.9

Zbadać dziedzinę, maksima, punkty przegięcia, asymptoty, zera, ... funkcji i naszkicować jej wykres, gdy $y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$.

Zadanie O5.10

Obliczyć pochodne $y'(x)$ funkcji uwikłanych:

1. $y^3 + x^3 = 0;$
2. $y^2x - yx^2 - 6e^x = 0;$

Zadanie O5.11

Obliczyć pochodne funkcji $f(x) = x^2 e^{-x} \cos x$, $g(x) = e^{-\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Zadania dodatkowe

Zadanie D5.1

Wykazać, posługując się definicją pochodnej, że dla funkcji $3|x| + 1$ nie istnieje pochodna w punkcie $x = 0$.

Zadanie D5.2

Wyznaczyć pochodne funkcji:

1. $\frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1};$
2. $e^x(\sin x + \cos x);$

3. $1 - \sqrt[3]{x^2} + 16/x$;
4. $\frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$;
5. $\ln[\sin(x^3 + 1)]$;
6. $\arcsin(\sqrt{x^2 - 1})$;
7. $\ln^2[\operatorname{arctg}(x/3)]$;
8. $\arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Zadanie D5.3

Korzystając z tzw. pochodnej logarytmicznej,

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

wyznaczyć pochodne funkcji

1. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$;
2. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\sin(3x)}{1 - \sin(3x)}}$;

Zadanie D5.4

Napisać równanie stycznej i równanie prostej prostopadłej do krzywej $y = f(x)$ we wskazanym punkcie x_0 jeśli

1. $f(x) = \sin^2 x$ i $x_0 = \pi/6$.
2. $f(x) = 2x^2 - x + 5$ i $x_0 = -0.5$;
3. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 16$ i $x_0 = \pm 2$;

Zadanie D5.5

Znaleźć punkty na krzywej $y = x^3 - 3x + 5$, w których styczna:

1. jest równoległa do linii $y = -2x$;
2. tworzy kąt 30° z dodatnią osią x .

Zadanie D5.6

Niech $f(x) = 3x^2 - 5$. Wyznaczyć ξ z przedziału $a < \xi < b$, spełniające formułę Lagrange'a $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ jeśli $a = 0$ i $b = 6$.

Zadanie D5.7

Na krzywej $y = x^3$ znaleźć punkt, w którym styczna jest równoległa do siecznej łączącej punkty $(-1, -1)$ i $(2, 8)$.

Zadanie D5.8

Korzystając z reguły de L'Hospitala wyznaczyć granice:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \arctg(x^2) - \pi}.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)};$
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x+x}};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$

Zadanie D5.9

Wyznaczyć ekstrema funkcji (jeśli można, to również punkty przegięcia):

1. $f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2;$
2. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12;$
3. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$

Posługujemy się jedynie pierwszą pochodną i jej znakiem przed i po punkcie stacjonarnym.

Zadanie D5.10

Zbadać dziedzinę, maksima, punkty przegięcia, asymptoty, zera, ... funkcji i naszkicować jej wykres, jeśli:

1. $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 9;$
2. $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1};$

Zadania dodatkowe 2

Zadanie E5.1

Wyznaczyć równanie stycznej do hiperboli $y = c/x$, $c > 0$, w punkcie $x_0 > 0$. Wyznaczyć punkt przecięcia tej stycznej x_p z osią x i określić związek łączący punkty x_0 i x_p .

Zadanie E5.2

Wykazać, że dla $x > 0$ i $0 \leq p \leq 1$ funkcja $f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p$ jest funkcją rosnącą. Pokazać, że z tego faktu wynika nierówność $(1+x)^p \leq 1 + x^p$ dla $x \geq 0$. Wyprowadzić stąd nierówność $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ słuszną dla $a, b > 0$ i $0 \leq p \leq 1$. W szczególności otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b},$$

dla $a, b > 0$ i $n = 1, 2, 3, \dots$

Zadanie E5.3

Zbadać dziedzinę, maksima, punkty przegięcia, asymptoty, zera, ... funkcji i naszkicować jej wykres, jeśli:

1. $y = \frac{1-x^3}{x^2};$
2. $y = x + \ln(x^2 - 1);$

3. $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Zadanie E5.4

Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą (sprawdzić to). Obliczyć jej pochodną i sprawdzić, czy jest ona funkcją ciągłą.

Zadanie E5.5

Obliczyć pochodne $y'(x)$ funkcji uwikłanych:

1. $\arctg y + \arcsin x = 0$;
2. $y + \ln y - 2x^7 + \sin x = 0$.

Zadanie E5.6

Wyznaczyć parametry a , b i c paraboli $y = ax^2 + bx + c$ tak, aby w punkcie $x = 1$ była ona styczna do prostej $y = x$ i przechodziła przez punkt $(-1, 0)$.

Zadanie E5.7

Testem zgodności funkcji nazywamy stwierdzenie mówiące, że jeśli dla wszystkich punktów z pewnego odcinka (a, b) pochodna $f'(x) = 0$, to na tym odcinku funkcja $f(x)$ jest stała. Korzystając z testu zgodności wykazać równość $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Podobnie,

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2\arctg x & x \geq 1 \\ 2\arctg x & -1 \leq x \leq 1 \\ -\pi - 2\arctg x & x \leq -1 \end{cases}$$

Zadania obowiązkowe

Zastosowania pochodnych funkcji.

Zadanie O7.1

Wiedząc, że dla $x \neq 1$,

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

wyznaczyć sumy

$$a) \quad 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

$$b) \quad 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$$

Zadanie O7.2

Wyznaczyć ekstrema i punkty przegięcia oraz obszary wypukłości i wklęsłości funkcji:

$$1. \quad f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7;$$

$$2. \quad f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2;$$

Zadanie O7.3

Niech $y = 2x^2 - x^4$. Określić obszary, na których funkcja ta jest funkcją monotoniczną i wyznaczyć dla nich funkcję odwrotną $x = x(y)$ a następnie obliczyć jej pochodną $x'(y)$.

Zadanie O7.4

Pokazać, że istnieje funkcja $y = y(x)$ zdefiniowana równaniem $y^3 + 3y = x$ i wyznaczyć jej pochodną $y'(x)$. Zadanie sprowadza się do sprawdzenia, że funkcja $x(y)$ jest monotoniczna.

Zadanie O7.5

Przez zbadanie funkcji rozumie się na ogół wykonanie następujących czynności:

- Określenie dziedziny.
- Sprawdzenie, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta lub okresowa.
- Wyznaczenie asymptot wykresu tej funkcji.
- Wyznaczenie punktów ekstremalnych.
- Wyznaczenie punktów przegięcia.
- Naszkicowanie wykresu.

Zbadać funkcje:

$$a) \quad f(x) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad b) \quad f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right) \quad c) \quad f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

Rozwinięcie Taylora wokół $x = 0$ (czyli rozwinięcie McLaurina).

Zadanie O7.6

Rozwinąć w szereg Taylora aż do wyrazy z x^6 funkcję

$$f(x) = (1 + ax)^\alpha,$$

gdzie a i α są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Zadanie O7.7

Rozwinąć w szereg Taylora aż do wyrazy z x^6 funkcję

$$g(x) = (1 - x^2)^{-1/2}.$$

Powiąznać wynik z rozwinięciem z zadania O7.6.

Zadania dodatkowe

Zadanie D7.1

Wyznaczyć ekstrema i punkty przegięcia funkcji:

1. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$;
2. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

Zadanie D7.2

Przez zbadanie funkcji rozumie się na ogół wykonanie następujących czynności:

- Określenie dziedziny.
- Sprawdzenie, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta lub okresowa.
- Wyznaczenie asymptot wykresu tej funkcji.
- Wyznaczenie punktów ekstremalnych.
- Wyznaczenie punktów przegięcia.
- Naskicowanie wykresu.

Zbadać funkcje:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} & b) f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5 & c) f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ d) f(x) = x^2 e^{1/x} & e) f(x) = (1 + x)^{1/x} & f) f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) + \cos x \end{array}$$

Zadanie D7.3

Zbadać funkcję i naskicować jej wykres, jeśli:

1. $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 9$;
2. $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$;
3. $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$;
4. $y = \frac{1-x^3}{x^2}$;
5. $y = x + \ln(x^2 - 1)$;
6. $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$;
7. $y = \exp(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$;
8. $y = |1+x|^{3/2}/\sqrt{x}$.

Zadanie D7.4

Niech

$$u(v) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}$$

Określić obszary monotoniczności i wyznaczyć funkcję odwrotną $v(u)$. Sprawdzić relację

$$u'(v)v'(u) = \frac{du}{dv} \frac{dv}{du} = 1$$

Zadanie D7.5

Rozwinąć w szereg Taylora aż do wyrazu z x^6 funkcję

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Czy można otrzymać rozwinięcie aż do wyrazu z x^{100} , nie wkładając w to zbytniego wysiłku?

Zadanie D7.6

Wykazać indukcyjnie, że dla $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ zachodzi równość

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$$

a następnie wyznaczyć sumę

$$\sin x + 3 \sin 3x + \dots + (2n-1) \sin(2n-1)x$$

Zadania obowiązkowe

Całki nieoznaczone, czyli funkcje pierwotne lub antyrozniczkowanie.

Zadanie O8.1

Obliczyć całki:

1. $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}} dx$;
2. $\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1} dx$;
3. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \operatorname{tg} x dx$; tu zamiast jedynki wpisujemy jedynkę trygonometryczną i rozbijamy na dwie całki;
4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;
5. $\int (x^2 + 5)^3 dx$;
6. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} dx$;
7. $\int \cos(4x) \cos(7x) dx$;

Zadanie O8.2

Metodą podstawienie obliczyć całki:

1. $\int x\sqrt{x-5} dx$;
2. $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}} dx$;
3. $\int \frac{x^2-1}{(x^4+3x^2+1)\operatorname{arctg}(x+1/x)} dx$;
4. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx$;
5. $\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$;
6. $\int \sqrt[3]{1+3 \sin x} \cos x dx$;

Zadanie O8.3

Metodą całkowania przez części obliczyć całki:

1. $\int \operatorname{arctg} x dx$;
2. $\int \arcsin x dx$;
3. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Zadanie O8.4

Obliczyć całki poniższych funkcji

1. $\frac{1}{(x-2)(x+3)},$
2. $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)},$
3. $\frac{x^2+x}{(1+x^2)^2}.$

Zadania dodatkowe

Zadanie D8.1

Obliczyć całki:

1. $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx;$
2. $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx;$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} dx;$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2-4x}} dx;$
5. $\int \frac{1}{4-x^2-4x} dx;$
6. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$
7. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx;$
8. $\int (\sin(5x) - \sin(5\alpha)) dx;$
9. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

Zadanie D8.2

Metodą podstawienie obliczyć całki:

1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx;$
2. $\int \frac{1}{(\arcsin x)^5 \sqrt{1-x^2}} dx;$
3. $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x} dx;$
4. $\int \frac{1+\ln x}{3+x \ln x} dx.$

Zadanie D8.3

Metodą całkowania przez części obliczyć całki:

1. $\int x^3 \ln x dx;$
2. $\int (3x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} x dx;$
3. $\int \cos(\ln x) dx;$ dwa razy.

Całki nieoznaczone.

Zadania obowiązkowe

Zadanie O9.1

Wyznaczyć poniższą całkę przez podstawienie $t = \operatorname{ctg} x$:

$$I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$$

Zadanie O9.2

Wyznaczyć poniższą całkę przez podstawienie $t = \operatorname{tg} x$:

$$I = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

Zadanie O9.3

Wyznaczyć całkę

$$I = \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}$$

poprzez podstawienie $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

Zadanie O9.4

Korzystając z podstawienia $t = \cos x$ obliczyć całkę

$$\int dx \frac{1}{\sin x(2 \cos^2 x - 1)}.$$

Zadanie O9.5

Korzystając z jednego z podstawień Eulera obliczyć całki

$$\int dx \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}, \quad \int dx \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Zadanie O9.6

Obliczyć całkę

$$\int dx x e^x \sin(x+2)$$

Zadania dodatkowe

Zadanie D9.1

Poprzez różniczkowanie wykazać słuszność następującej równości

$$\int dx \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + K \int dx \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

gdzie $P_m(x)$ i $P_{m-1}(x)$ są wielomianami stopnia m i $(m-1)$, a K jest stałą.

Wyznaczyć $P_1(x)$ i K jeśli $P_2(x) = 2x^2 + 3x + 4$.

Zadanie D9.2

Wyznaczyć całki z funkcji trygonometrycznych, metodą podwajania kątów lub zgadywania ze znajomości tabeli metod i całek podstawowych:

$$\int dx \sin^4 x, \quad \int dx \operatorname{ctg}^2 x, \quad \int dx \operatorname{tg}^3 x.$$

Zadanie D9.3

Korzystając z podstawienia $t = \operatorname{tg}(x/2)$ obliczyć całkę

$$\int dx \frac{1}{5 + \sin x + 3 \cos x}.$$

Zadanie D9.4

Wyznaczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

$$\int dx \frac{1}{\sin x \cos^2 x}, \quad \int dx \frac{\cos^3 x}{\sin x}, \quad \int dx \frac{1}{\sin^4 x}.$$

Zadanie D9.5

Korzystając z podstawienia $t = \operatorname{tg} x$ obliczyć całkę

$$\int dx \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

Zadanie D9.5

Korzystając z jednego z podstawień Eulera obliczyć całki:

$$\int dx \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}, \quad \int dx \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^{18}}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Zadanie D9.6

Obliczyć całkę

$$\int dx x^2 e^{2x} \cos(x + 5)$$

Tydzień 10 — 5-9.12.2016

Całki oznaczone i zastosowania całek.

Zadania obowiązkowe

Zadanie O10.1

Niech

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx.$$

Wykazać rekurencję

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

Zadanie O10.2

Znaleźć wzór rekurencyjny dla całek

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx.$$

Zadanie O10.3

Obliczyć całki (w nawiasie sugerowana zamiana zmiennej)

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} \, dx, \quad x = 2 \sin t,$$

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} \, dx, \quad x = \frac{2}{\cos t},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6-5 \sin x + \sin^2 x} \, dx, \quad t = \sin t.$$

Zadanie O10.4

Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2$$

oraz prostymi $x = 0$ i $x = 2$.

Zadanie O10.5

Naszkicować krzywą zadaną parametrycznie $x = a \sin t$, $y = b \sin(2t)$ wyznaczając jej punkty dla $t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ itd. Obliczyć pole nią ograniczone (odp. $P = 8ab/3$).

Zadanie O10.6

Obliczyć długość krzywej zadaną parametrycznie $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ dla $0 \leq t \leq 2\pi$ (odp. $L = 2a\pi^2$). Naszkicować tę krzywą.

Zadania dodatkowe

Zadanie D10.1

Znaleźć związek rekurencyjny dla całek

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Zadanie D10.2

Obliczyć całki (w nawiasie sugerowana zamiana zmiennej)

$$\int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx, \quad t = \operatorname{tg} x.$$

Zadanie D10.3

Naszkicować krzywą zadaną parametrycznie $x = t(6-t)/3$, $y = t^2(6-t)/8$ dla $0 \leq t \leq 6$.
Obliczyć pole nią ograniczone (odp. $P = 27/5$).

Zadanie D10.4

Naszkicować krzywą zamkniętą nazywaną kardioidą i zadaną parametrycznie równaniami $x = a \cos t(1 + \cos t)$, $y = a \sin t(1 + \cos t)$ dla $0 \leq t \leq 2\pi$ i obliczyć pole obszaru nią otoczonego.

Tydzień 11 — 12-16.12.2016

Zastosowania całek i całki niewłaściwe.

Zadania obowiązkowe

Zadanie O11.1

Powierzchnię jajka z ostrym czubkiem możemy otrzymać w wyniku obrotu wokół osi x krzywej zadanej parametrycznie równaniami $x = t^2$, $y = t(t^2 - 3)/3$ dla $0 \leq t \leq \sqrt{3}$. Naskicować tę powierzchnię obrotową i obliczyć jej pole (odp. $P = 3\pi$).

Zadanie O11.2

Obliczyć pole figury ograniczonej krzywą $r = 2a \cos(3\varphi)$ i łukiem okręgu $r = a$ (r i φ są współrzędnymi biegunowymi) i znajdującej się na zewnątrz okręgu. (odp. $a^2(\pi/9 + \sqrt{3}/6)$).

Zadanie O11.3

Wyznaczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły otrzymanej w wyniku obrotu wokół osi x wycinka krzywej będącej wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ dla $0 \leq x \leq 1$. W przypadku obliczania całki na pole powierzchni bocznej skorzystać z podstawienia Eulera

$$\sqrt{1+x^2} = t - x.$$

Określić w tym celu

$$x, \sqrt{1+x^2} \text{ i } \frac{dx}{dt} \text{ w funkcji parametru } t.$$

Obliczyć długość tego wycinka krzywej stosując to samo podstawienie Eulera.

Zadanie O11.4

Sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych (nie obliczając ich):

1. $\int_a^{3a} \frac{2x}{(x^2 - a^2)^{3/2}} dx;$

2. $\int_0^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx;$

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} \cos\left(\frac{\pi}{1-x}\right) dx;$

4. Sprawdzić zbieżność całki niewłaściwej

$$2\pi \int_0^\infty e^{-x} \sqrt{1 + e^{-2x}} dx,$$

a następnie obliczyć ją (odp. $\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$). Powiązać ten wynik z polem figury obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = e^{-x}$ wokół osi x dla $0 \leq x \leq \infty$.

Zadanie O11.5

Obliczyć całki:

1. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx, \quad b > a,$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{x^4+1} dx$. Narysować obszar, którego pole jest równe tej całce.

Zadania dodatkowe

Zadanie D11.1

Obliczyć długość łuku krzywej $y = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1})]$ dla $1 \leq x \leq 1+a, a > 0$.

Zadanie D11.2

Obliczyć we współrzędnych biegunowych pole wycięte przez krzywą $r = 3 \sin \varphi$ z kardioidy $r = 1 + \cos \varphi$. Naskicować wykresy. (r i φ są współrzędnymi biegunowymi.)

Zadanie D11.3

Sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych nie obliczając ich:

1. $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} dx;$
2. $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx;$
3. $\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x} dx;$

Zadanie D11.4

Obliczyć całki:

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2} dx.$$

Tydzień 12 — 19-22.12.2016

Szeregi liczbowe.

Zadanie O12.1

Sprawdzić zbieżność szeregów liczbowych:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+1}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{3/2}+4}{n^3+1}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; np. wzór Stirlinga dla dużych n : $\lim_{n \rightarrow \infty} n! / [\sqrt{2\pi n} (n/e)^n] = 1$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ (bez korzystania ze wzoru Stirlinga i z wykorzystaniem);
5. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^{1+p}}$ dla $p > 0$ (kryterium całkowite).

Zadanie O12.2

Sprawdzić zbieżność szeregów liczbowych naprzemiennych:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2+2n+1}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n!}}{10^n}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

Zadanie O12.3

Rozbić funkcję

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)},$$

na ułamki proste, a następnie wyznaczyć sumę skończoną

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$$

i jej granicę, gdy $N \rightarrow \infty$.

Zadanie O12.4

Wykazać, że jeżeli wyraz szeregu a_n da się przedstawić w postaci $a_n = x_n - x_{n+1}$, gdzie x_n jest n -tym wyrazem ciągu zbieżnego do g , to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x_1 - g$$

Zastosować ten wzór do zadania poprzedniego.

Wyprowadzić analogiczny wzór, gdy $a_n = x_n - x_{n+k}$, gdzie $k = 2$.

Zadanie O12.5

Określić promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^{2n}.$$

Sprawdzić jego zbieżność na krańcach obszaru zbieżności. Korzystając z metody różniczkowania i całkowania szeregów wyznaczyć jego postać funkcyjną w promieniu zbieżności.

Zadanie O12.6

Rozłożyć w szereg potęgowy funkcję $f(x) = 3/[(1-x)(1+2x)]$ i określić jego promień zbieżności.

Zadanie O12.7

Korzystając z różniczkowania lub całkowania szeregów potęgowych wyznaczyć jawną postać funkcji, której szereg potęgowy ma postać:

1. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$
2. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n};$
3. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$

Określić promienie zbieżności tych szeregów.

Zadania dodatkowe

Zadanie D12.1

Sprawdzić zbieżność szeregów liczbowych:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3+1};$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)^3};$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 4^n}{n^n};$
6. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^3}.$

Zadanie D12.2

Rozbić na ułamki proste funkcję

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+\alpha)}$$

i wykonać sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$$

Zadanie D12.3

Niech $f(x)$ będzie taką funkcją, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x+1)] = C.$$

Wykazać, że jeśli $a_n = f(n) - 2f(n+1) + f(n+2)$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(1) - f(2) - C.$$

Zadanie D12.4

Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}]$$

jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym. Wyznaczyć jego wartość korzystając z poprzedniego zadania.

Zadanie D12.5

Korzystając z różniczkowania lub całkowania szeregów potęgowych wyznaczyć jawną postać funkcji, której szereg potęgowy ma postać:

1. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$
2. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n;$
3. $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2};$
4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1};$
5. $x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3};$
6. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$

Określić promienie zbieżności tych szeregów.

Szeregi funkcyjne.

Zadanie O13.1

Korzystając z wyniku zadania D12.5, pkt.3,

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

obliczyć sumę

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$$

Zadanie O13.2

Korzystając z różniczkowania lub całkowania szeregów potęgowych wyznaczyć jawną postać funkcji, której szereg potęgowy ma postać:

1. $x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3},$
2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$

i określić promienie ich zbieżności.

Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu.

Zadanie O13.3

Rozwiązać równanie $y' = \sqrt{3x+2y} - \frac{3}{2}$ i naszkicować rozwiązania.

Wsk. Podstawienie $z = 3x + 2y$.

Rozw. $y = \frac{1}{2}(x+C)^2 - \frac{3}{2}x$ dla $x \geq -C$ oraz rozwiązanie osobliwe $y = -\frac{3}{2}x$.

Zadanie O13.4

Rozwiązać równanie $y' = \cos(x-y)$.

Wsk. Podstawienie $z = x - y$.

Rozw. $x + \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = C$.

Zadanie O13.5

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu

$$\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg}(x)y = \cos(x).$$

Wyznaczyć rozwiązanie spełniające warunek początkowy $y(0) = 0$.

Zadanie O13.6

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right) dx + 2\frac{x}{y} dy = 0$$

podstawiając $y = xz$. Wyznaczyć rozwiązanie spełniające warunek początkowy $y(1) = 1$.

Zadanie O13.7

Rozwiązać równanie $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Wsk. Równanie liniowe.

Rozw. $y = (C + x^2)e^{-x^2}$.

Zadanie O13.8

Rozwiązać równanie $x(1 + y^2) dx + y(1 + x^2) dy = 0$.

Rozw. $(1 + x^2)(1 + y^2) = C$.

Zadanie O13.9

Rozwiązać równanie $(xy - x) dx + (xy + x - y - 1) dy = 0$.

Wsk. Zapisać je w postaci $x(y - 1) dx + (x - 1)(y + 1) dy = 0$.

Rozw. $x + \ln|x - 1| + y + 2 \ln|y - 1| = C$.

Zadania dodatkowe

Zadanie D13.1

Rozwiązać równanie $xyy' = 1 - x^2$.

Rozw. $x^2 + y^2 = C + 2 \ln x$

Zadanie D13.2

Rozwiązać równanie $y' - y \tan x = 1/\cos x$ dla warunku początkowego $y(0) = 0$.

Rozw. $y = x/\cos x$.

Zadanie D13.3

Rozwiązać równanie $2xyy' - y^2 + x = 0$.

Rozw. $Cx - x \ln x$.

Zadanie D13.4

Korzystając z różniczkowania lub całkowania szeregów potęgowych wyznaczyć jawną postać funkcji, której szereg potęgowy ma postać:

$$1. \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n},$$

i określić jej promień zbieżności.

Tydzień 14 – 16-20.01.2017

Równania różniczkowe zwyczajne.

Uwaga: podaję sposób rozwiązania i prawdopodobną postać rozwiązania, ale do niej proszę podejść krytycznie, mogą być literówki.

Zadanie O14.1

Rozwiązać równanie $y' + xy = xy^3$.

Wsk. równania typu Bernouelliego z członem nieliniowym y^α sprowadza się do równania liniowego dla funkcji $z(x)$ przez zamianę $z = y^{1-\alpha}$.

Zadanie O14.2

Rozwiązać równanie $y'' - 4y' + 4y = x^2$ ze zgadywaniem rozwiązania szczególnego.

Rozw. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (2x^2 + 4x + 3)/8$

Zadanie O14.3

Rozwiązać równanie $y'' + 2y' + y = e^{2x}$ ze zgadywaniem rozwiązania szczególnego.

Rozw. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^{2x}/9$.

Zadanie O14.4

Rozwiązać równanie $xy'' + y' = x^2$.

Wsk. podstawienie $z = y'$.

Rozw. $y = C_1 \ln x + C_2 + x^3/9$.

Zadanie O14.5

Rozwiązać równania różniczkowe liniowe jednorodne o stałych współczynnikach

a) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$,

Odp. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x}$.

b) $y''' - y = x^3 - 1$

Odp. $y = C_1e^x + (C_2 \cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + C_3 \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))e^{-x/2} - x^3 - 5$.

Zadanie O14.6

Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = x + y + z \end{cases}.$$

a) biorąc korzystne kombinacje liniowe tych równań

b) szukając wartości i wektorów własnych.

W obu przypadkach szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego zgadujemy.

Odp. $y = C_1 + C_2e^{2x} - (x^2 + x)/4$, $z = -C_1 + C_2e^{2x} + (x^2 - x - 1)/4$.

Funkcje wielu zmiennych.

Zadanie O14.7

Wyznaczyć wszystkie pierwsze i drugie pochodne funkcji:

1. $f(x, y) = xe^y + y$;

2. $f(x, y) = y \sin x + x^2$;

3. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

4. $f(x, y) = e^{-y} \cos(xy)$;

i sprawdzić równość pochodnych mieszanych.

Zadanie O14.8

Wykazać, że

1. jeżeli $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ (dla $(x, y) \neq (0, 0)$), to $f_{xx} + f_{yy} = 0$;

2. jeżeli $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ (dla $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$), to $xf_{yz} = yf_{zx} = zf_{xy}$;

3. jeżeli $f(x, y) = xy \operatorname{tg}(y/x)$ (dla $x \neq 0$), to $xf_x + yf_y = 2f$.

Tydzień 15 — 23-27.01.2017

Funkcje wielu zmiennych i całki wielokrotne.

Zadanie O15.1

Wykazać, że dla funkcji zdefiniowanej dla $x \neq 0$ i $y \neq 0$

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

granice iterowane $\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ i $\lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ nie istnieją, ale funkcja ma granicę podwójną w $(x, y) = (0, 0)$.

Zadanie O15.2

Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2 - 4y^2$$

i określić ich charakter.

Zadanie O15.3

(Można zrobić jeden z nich) Obliczyć całki wielokrotne:

$$a) \int_S \frac{x^2}{1 + y^2} dx dy,$$

gdzie S jest kwadratem o wierzchołkach w $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$.

$$b) \int_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy,$$

gdzie S jest częścią koła o środku w $(0,0)$ i promieniu 1 z pierwszej ćwiartki.

Zadanie O15.4

Wyznaczyć na płaszczyźnie obszar całkowania i zamienić kolejność w całce iteracyjnej. Obliczyć (w przypadku a) pole tego obszary korzystając z obu całek iteracyjnych.

a)

$$\int_{-6}^2 dy \int_{y^2/4-1}^{2-y} dx f(x, y).$$

b)

$$\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy f(x, y).$$

c)

$$\int_1^3 dx \int_{x/3}^{2x} dy f(x, y).$$

Zadanie O15.5

Znaleźć pole ograniczone parabolami $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$ i $y^2 = \beta x$, gdzie $0 < a < b$ i $0 < \alpha < \beta$.

Wsk.: Skorzystać z zamiany zmiennych $x^2 = uy$ i $y^2 = vx$.

Odp.: $(b - a)(\beta - \alpha)/3$.

Zadania dodatkowe**Zadanie D15.1**

Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

i określić ich charakter.

Zadanie D15.2

Obliczyć całki podwójne:

$$a) \int_S e^{x/y} dx dy,$$

gdzie S jest obszarem ograniczonym parabolą $y = \sqrt{x}$ i prostymi $x = 0$ oraz $y = 1$. Uwaga: jedną z całek iteracyjnych liczy się łatwo, druga jest trudna. Wybrać metodę łatwą.

$$b) \int_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

gdzie S jest wnętrzem elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$. Wykorzystać zamianę zmiennych $x = ar \cos \varphi$ i $y = br \sin \varphi$.

Zadanie D15.3

Obliczyć

$$\int_S (x^2 + y^2) dx dy,$$

gdzie S jest obszarem $x^4 + y^4 \leq 1$. Skorzystać z symetrii i całkować tylko po pierwszej ćwiartce.

Rachunki wykonać korzystając z ortogonalnych współrzędnych

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

oraz nieortogonalnych współrzędnych

$$x = \sqrt{r} \cos \varphi, y = \sqrt{r} \sin \varphi.$$

W obu przypadkach otrzymujemy $\pi/\sqrt{2}$.

Zadanie D15.4

Znaleźć pole części powierzchni paraboloidy $y^2 + z^2 = 2ax$ znajdującej się pomiędzy powierzchnią $y^2 = ax$ a płaszczyzną $x = a$.

Odp.: $\pi a^2(3\sqrt{3} - 1)/3$.