ZADANIA DOMOWE Z MATEMATYKI II L

SERIA 2

1 WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE

1. Pokazać, że gdy macierz $F \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ jest rzutowa (tzn. gdy $F^2 = F$) to $\mathrm{Sp}\, F = \{0, 1\}$.

2. Rozwiązać zagadnienie własne dla macierzy $F = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

3. Rozwiazać zagadnienie własne dla macierzy $F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ gdy:

   a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

   b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. (Uwaga: Gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ to $\mathrm{Sp}\, F$ może być zbiorem pustym.)

   Znaleźć wartości własne F^{-1}. (Wskazówka: Obliczenie F^{-1} nie jest konieczne.)

2 FUNKCJE OD MACIERZY

1. Obliczyć $\cos(\frac{\pi}{2}A)$ dla $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\sin(\frac{\pi}{2}A)$ dla $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Obliczyć $e^{\pi A}$ gdy $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Dla $F = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ obliczyć $\sin tF$, $\cos tF$ oraz $(\sin tF)^2 + (\cos tF)^2$.

4. Dla macierzy $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obliczyć $\phi(F)$, gdzie $\phi(\lambda) = \frac{2}{\lambda-6} + \frac{3}{\lambda-4} - \frac{2}{\lambda-2}$.

5. Obliczyć

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{2009}$

   b) $\frac{1}{2^{10}}[F^{10} - (F - 2 \cdot \mathbb{1})^{20}]$ dla $F = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -4 \end{pmatrix}$

6. Obliczyć $\ln A$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

3 DIAGONALIZACJA MACIERZY

1. Wiedząc, że każda macierz hermitowska H jest diagonalizowalna oraz że $\mathrm{Sp}\, H \subset \mathbb{R}$ pokazać, że macierz S diagonalizująca macierz H jest macierzą unitarną.

2. Zbadać diagonalizowalność macierzy $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Sprawdzić, czy dla macierzy $F = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ istnieje taka macierz B, że macierz $B^{-1}FB$ jest diagonalna.

4. Znaleźć transformację S diagonalizującą macierze:

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$,

   b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4 FORMY KWADRATOWE

1. Metoda Lagrange'a sprowadzić do postaci kanonicznej następujące formy kwadratowe oraz podać ich sygnatury i rząd:

   a) $h(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 3yz$

   b) $h(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4yz$

   c) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1^2 + x_3^2$

   d) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2$

5 PRZESTRZENIE WEKTOROWE

1. Pokazać, że zbiór V macierzy 2×2 o zerowych elementach diagonalnych tzn.[1]

$$V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) : A = (a_{ij}),\ a_{11} = a_{22} = 0\}$$

   jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

2. Sprawdzić liniową niezależność wektorów:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dane są cztery wektory:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Znaleźć a takie, aby wektory te były liniowo niezależne.

4. Wykazać, że wektory $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ są liniowo zależne i przedstawić wektor v_3 w postaci kombinacji liniowej wektorów v_1 i v_2.

[1] $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$ oznacza zbiór wszystkich macierzy $n \times m$ o elementach z ciała $\mathbb{K}$.

5. Przedstawić poniższe wielomiany w postaci kombinacji liniowych wielomianów bazowych: $e_1 = 2 + x + 4x^2$, $e_2 = 1 - x + 3x^2$, $e_3 = 3 + 2x + 5x^2$

   a) $2 + 6x^2$

   b) $2 + 2x + 3x^2$

   c) $5 + 9x + 5x^2$

6. Sprawdzić czy wektory (e_1, e_2, e_3) stanowią bazę w $\mathbb{R}^3$ i przedstawić wektor v w tej bazie:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. Wyznaczyć wymiar przestrzeni V

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

8. Niech (e_1, e_2, e_3) będzie bazą w przestrzeni wektorowej V oraz $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Czy (f_1, f_2, f_3) jest bazą w V?

9. Znaleźć bazę ortonormalną w $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, gdzie

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

10. Znaleźć bazę ortonormalną i wymiar podprzestrzeni rozpiętej na wektorach $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, gdzie

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

11. W przestrzeni unitarnej $V = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ wielomianów stopnia $\leqslant 3$ dla $x \in [0, +\infty[$ z iloczynem skalarnym $\langle p|q \rangle = \int_0^\infty p^*(x)q(x)e^{-x}dx$ znaleźć bazę ortonormalną metodą Grama-Schmidta.

6 GRUPY I CIAŁA

1. Pokazać, że w dowolnej grupie $(G, \star)$ zachodzi: $e^{-1} = e$.

2. Zakładając, że działanie $\star$ w grupie $(G, \star)$ ma następujące własności:

   a) $(g_1 \star g_2) \star g_3 = g_1 \star (g_2 \star g_3)$

   b) $g \star e = g$

   c) $g \star g^{-1} = e$

   pokazać, że $g \star e = e \star g$, oraz $g^{-1} \star g = e$

3. Pokazać, że w dowolnym ciele $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ zachodzi: $a \odot (-b) = (-a) \odot b = -(a \odot b)$ oraz $(-a) \odot (-b) = a \odot b$.