Wstęp do teorii oddziaływań fundamentalnych

Zadania domowe

1 Grupa Lorentza

Zad. 1.1

Wykazać równość:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_k} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0),$$

gdzie $E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$, a funkcja $\theta(x) = 1$ dla $x \geq 0$ i $\theta(x) = 0$ dla $x < 0$. Ponadto przydatne mogą się okazać własności funkcji delta:

$$\delta[y(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|y'(x_i)|}, \qquad y' = \frac{dy}{dx}, \qquad x_i - \text{bieguny } y(x).$$

Czy powyższa całka jest niezmiennicza lorentzowsko?

Zad. 1.2

Właściwa grupa Lorentza $O_+^\uparrow(1,3)$ ma podwójne nakrycie $SL(2,C)$. Operator $U \in SL(2,C)$ działa na czterowektory w następujacy sposób:

$$\sigma_\mu w^\mu \equiv w \to Uw\, U^+ = \sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\nu w^\nu.$$

Znaleźć U i Λ opowiadające:
(a) obrotowi o kąt ϕ wokół osi OZ,
(b) pchnięciu z prędkością v wzdluż osi OZ.

Zad. 1.3

Niech spinor ψ transformuje się względem $U \in SL(2,C)$ wg. formuły: $\psi \to U\psi$. Pokazać, że $\bar{\psi} = i\sigma^2\psi^*$ transformuje się wg. wzoru: $\bar{\psi} \to \bar{U}\bar{\psi}$, gdzie $U^+\bar{U} = 1$.

Zad. 1.4*

Niech pole spinorowe ψ transformuje się względem $U \in SL(2, C)$ wg. formuły: $\psi'(x') = U\psi(x)$ (związki miedzy U i Λ są takie jak w **Zad.** 1.2). Pokazać, że wyrażenia:

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} = 0$$
$$\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - m\psi = 0$$

są kowariantne.

Zad. 1.5

Rozwiazać równanie Diraca dla spoczywającej cząstki Majorany o masie m

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} = 0.$$

W oparciu o transformacje Lorentza $\psi'(x') = U\psi(x)$ odpowiadającą pchnięciu wzdluż osi OX z prędkością v, znaleźć postać rozwiązania dla powyższego równania dla cząstki o zadanym pędzie wzdluż tej samej osi.

Zad. 1.6*

Pokazać, że bispinor

$$\psi_c = C\bar{\psi}^T$$

pod działaniem grupy Lorenza transformuje się tak samo jak ψ, jeśli

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu\ T}.$$

Wskazówka:

$$\begin{aligned}
\psi' &= U\psi,\ U = \exp\{i\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\},\ S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\eta^{\mu\nu}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}) \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})
\end{aligned}$$

2 Kinematyka

Zad. 2.1

Jaki musi być pęd wiązki protonów skierowanych na nieruchomą tarczą protonową (układ LAB), aby energia na produkcję cząstek w tym zderzeniu była taka sama, jak w LHC, gdzie zderzają się przeciwbieżne wiązki protonów o pędzie 7 TeV każda (układ CMS)?

Zad. 2.2

Dla dwuciałowej przestrzeni fazowej pokazać, że

- $\int \frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^{(4)}(P-p_1-p_2)f(p_1\cdot p_2) = \frac{\pi\lambda(P^2,m_1^2,m_2^2)}{2P^2}\, f(\frac{1}{2}(P^2-m_1^2-m_2^2))$
- $\int \frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^{(4)}(P-p_1-p_2)f(p_1\cdot p_2)p_2^\mu = \frac{\pi\lambda(P^2,m_1^2,m_2^2)}{4P^4}(P^2+m_2^2-m_1^2)\, f(\frac{1}{2}(P^2-m_1^2-m_2^2))\, P^\mu$

gdzie $m_i^2 = p_i^2, \quad \lambda(a,b,c) = (a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)^{1/2}$.

Zad. 2.3

O niezmiennikach s, t, u:

- Dla procesu $a+b \to c+d$ pokaż, że zmienne Mandelstama $s=(p_a+p_b)^2$, $t=(p_a-p_c)^2$, $u=(p_a-p_d)^2$ spełniają $s+t+u = m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2$.
- Znaleźć związek między różniczkowym przekrojem czynnym w układzie CM i LAB (przy ustalonym s)? Warto wykorzystać fakt, że s i t nie zależą od układu (niezmienniki). Całkowity przekrój czynny σ (miara liczby cząstek rozproszonych w jakimkolwiek kierunku) jest niezmiennikiem, tak wiec $\frac{d\sigma}{dt}$ również. W układzie CM mamy:

$$\frac{d\sigma}{dt} = [\frac{1}{2p_ap_c}\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{ac}}]^{CM} = [\frac{\pi}{p_ap_c}\frac{d\sigma}{d\Omega}]^{CM},$$

gdzie θ_{ac} jest kątem rozproszenia cząstki c mierzonym od kierunku pędu cząstki a. Wyznacz zależnosc miedzy $(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{CM}$ a $(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{LAB}$.

3 Elektrodynamika i foton

Zad. 3.1

Dla zespolonych wektorów polaryzacji:

$$\begin{aligned} e(\vec{k},1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{l}_1(\vec{k}) + \imath\vec{l}_2(\vec{k})), \\ e^*(\vec{k},1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{l}_1(\vec{k}) - \imath\vec{l}_2(\vec{k})), \\ e(\vec{k},2) &= \frac{\imath}{\sqrt{2}}(\vec{l}_1(\vec{k}) + \imath\vec{l}_2(\vec{k})), \\ e(\vec{k},2) &= \frac{\imath}{\sqrt{2}}(\vec{l}_1(\vec{k}) - \imath\vec{l}_2(\vec{k})), \end{aligned}$$

gdzie $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ są wektorami rzeczywistymi i unormowanymi oraz spełniającymi:

$$\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \frac{\vec{k}}{|k|},\ \vec{l}_1 \cdot \vec{k} = \vec{l}_2 \cdot \vec{k} = 0,$$

pokazać, że zachodzi:

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e_i(\vec{k},\lambda)e_j^*(\vec{k},\lambda) = \delta_{ij} - \frac{k_i\, k_j}{k^2}.$$

4 Lagrangiany

Zad. 4.1

Lagranżjan cząstki o masie m i ładunku q poruszającej się w polu elektromagnetycznym dany jest

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{r}} - q\Phi,$$

gdzie $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ i $\Phi = \Phi(\mathbf{r},t)$ są wektorowym i skalarnym potencjałem pola elektromagnetycznego w miejscu znajdowania się cząstki $\mathbf{r}$ w chwili t (symbol z kropką oznacza pochodną po czasie).

a. pokazać, że $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ jest pędem sprzężonym do $\mathbf{r}$,

b. równanie Eulera-Lagrange'a ma postać

$$m\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} = q[\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}]$$

c. znaleźć hamiltonian i równania Hamiltona.

Zad. 4.2

Sprawdzić, że dodanie do lagranżjanu pełnej 4-dywergencji dowolnej funkcji pól nie zmienia równań ruchu.

Zad. 4.3

Pokazać, że lagranżjan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\partial_\alpha\Phi_\beta\partial^\alpha\Phi^\beta + \frac{1}{2}\,\partial_\alpha\Phi^\alpha\partial_\beta\Phi^\beta + \frac{m^2}{2}\,\Phi_\alpha\Phi^\alpha$$

dla rzeczywistego pola wektorowego Φ_α prowadzi do równań ruchu postaci

$$[g_{\alpha\beta}(\partial^2 + m^2) - \partial_\alpha\partial_\beta]\Phi^\beta = 0$$

i że pole Φ spełnia warunek Lorentza $\partial_\alpha\Phi^\alpha = 0$.

Zad. 4.4

Dla pola Diraca transformacja

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x),$$

gdzie α jest dowolnym parametrem rzeczywistym, nosi nazwę transformacji chiralnej.

a. Pokazać, że lagranżjan $\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$ w granicy $m \to 0$ jest niezmienniczy względem transformacji chiralnych.

b. Wyprowadzić równania ruchu dla pól

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi(x), \qquad \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi(x)$$

przy niezerowej masie m i pokazać, że równania te rozprzęgają się w granicy $m \to 0$.

5 Kwantówka

Zad. 5.1

Operatory pola zespolonego można wyrazić przez operatory kreacji i anihilacji w następujący sposób

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(a(k)e^{-\imath kx} + b^\dagger(k)e^{\imath kx}),$$

gdzie $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Wyrazić przez operatory kreacji i anihilacji operator ładunku dany

$$Q = e\int d^3x : \imath(\phi^\dagger\dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger\phi) :$$

Zad. 5.2

Korzystając z relacji komutacyjnych dla operatorów kreacji i anihilacji pola zespolonego

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3\, 2\omega_k\, \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'),\ [b(k), b^\dagger(k')] = (2\pi)^3\, 2\omega_k\, \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

pokazać, że dla dowolnych x_0, y_0 komutator

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \imath\Delta(x - y),$$

w jawnej postaci wyraża się wzorem

$$\Delta(x - y) = \imath \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(e^{-\imath k(x-y)} - e^{\imath k(x-y)}).$$

Ile wynosi $[\phi(x), \phi(y)]$?

Zad. 5.3

Wyrazić hamiltonian zespolonego pola skalarnego

$$H = \int d^3x((\partial_0\phi^\dagger)(\partial_0\phi) + \nabla\phi^\dagger \cdot \nabla\phi + m^2\phi^\dagger\phi)$$

przez operatory kreacji i anihilacji.

Zad. 5.4

Dla swobodnego pola Diraca

- wyrazić hamiltonian

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3x\Psi^\dagger\imath\partial_0\Psi,$$

  przez operatory kreacji i anihilacji;

- znaleźć prąd zachowany j^μ wynikający z niezmienniczosci teorii względem globalnej transformacji cechowania

$$\Psi(x) \ \rightarrow \ \Psi'(x) = e^{-\imath\alpha}\Psi(x),$$

  (α jest stalą faza) oraz ładunek $Q = \alpha\int d^3xj^0$.

- Wyrazić te wielkości przez operatory kreacji i anihilacji.

Zad. 5.5

Przy przesunięciu współrzędnych $x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = x_\alpha + \delta_\alpha$, gdzie δ jest ustalonym 4-wektorem, pole skalarne ϕ nie ulega zmianie, tz. $\phi'(x') = \phi(x)$ (czyli $\phi'(x) = \phi(x_\alpha - \delta_\alpha)$). Pokazać, że odpowiadająca temu unitarna transformacja pola

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U\phi(x)U^\dagger$$

dana jest przez $U = \exp\{-i\delta_\alpha P^\alpha\}$, gdzie P^α jest 4-pędem pola ϕ.

Zad. 5.6

Sprawdzić, że w obrazie oddziaływania, w którym ewolucja czasowa operatorów $A_I(t)$ jest opisana przez swobodny hamiltonian H_0 zgodnie z

$$A_I(t) = e^{iH_0t}Ae^{-iH_0t},$$

operatory pola skalarnego $\phi_I(x)$, $\pi_I(x)$ spełniają te same relacje komutacyjne, co w obrazie Schrödingera, tzn.

$$[\phi_I(\vec{x}, t), \pi_I(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Zad. 5.7

Pokaż, że propagator Feynmana dla rzeczywistego pola skalarnego:

$$(\partial^2 + m^2)\Delta(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'),$$

wynosi

$$\Delta(x - x') = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\theta(t - t')\phi_p^{(+)}(x)\phi_p^{(+)*}(x') + \theta(t' - t)\phi_p^{(-)}(x)\phi_p^{(-)*}(x')\right]$$

$$\phi_p^{(\pm)}(x) = \frac{e^{\mp ipx}}{\sqrt{2\omega_p}}.$$

Z reguł kanonicznego kwantowania oblicz $< 0|T\phi(x)\phi(x')|0 >$ a następnie pokaż, że

$$\Delta(x - x') = i < 0|T\phi(x)\phi(x')|0 >$$

6 Procesy

Zad. 6.1

Dla modelu zespolonych pól skalarnych ϕ_i, $(i = 1, 2)$ o masach m_i z oddziaływaniem

$$\mathcal{L}_I = -\lambda|\phi_1|^2|\phi_2|^2,$$

posługując się formalizmem kwantowej teorii pola, oblicz amplitudę przejścia cząstki i antycząstki typu 1 na cząstkę i antycząstkę typu 2.

$$1 + \bar{1} \to 2 + \bar{2}$$

Zad. 6.2

Dla modelu zespolonego pola skalarnego ψ o masie m oddziałującego z rzeczywistym polem skalarnym ϕ o masie $M > 2m$ oblicz amplitude rozpadu cząstki pola ϕ na cząstkę i antycząstkę pola ψ. Oddziaływanie miedzy tymi polami wynosi:

$$\mathcal{L}_I = -\lambda\phi|\psi|^2,$$

Zad. 6.3

Wyprowadzić z definicji (podobnie jak na wykładzie i w poprzednich zadaniach) w najniższym nieznikającym rzędzie element macierzowy operatora S dla

- procesu rozpraszania Comptona

$$\gamma(k,\lambda) + e^-(p,s) \to \gamma(k',\lambda') + e^-(p',s')$$

- procesu anihilacji

$$e^-(p,s) + e^+(p',s') \to \gamma(k,\lambda) + \gamma(k',\lambda')$$

- procesu rozpraszania Bhabha

$$e^-(p,s) + e^+(p',s') \to e^-(k,r) + e^+(k',r')$$