Wstęp do teorii oddziaływań fundamentalnych
Seria zadań domowych 2
Uwaga: zmienione zadanie 5 i dodane zadanie 7

Zad.1

Operatory pola zespolonego można wyrazić przez operatory kreacji i anihilacji w następujący sposób

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(a(k)e^{-\imath kx} + b^\dagger(k)e^{\imath kx}),\ \phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(a^\dagger(k)e^{\imath kx} + b(k)e^{-\imath kx}),$$

gdzie $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Wyrazić przez operatory kreacji i anihilacji operator ładunku dany

$$Q = e\int d^3x : \imath(\phi^\dagger\dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger\phi) :$$

Zad. 2

Korzystając z relacji komutacyjnych dla operatorów kreacji i anihilacji pola zespolonego

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3\, 2\omega_k\, \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'),\ [b(k), b^\dagger(k')] = (2\pi)^3\, 2\omega_k\, \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

pokazać, że dla dowolnych x_0, y_0 komutator

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \imath\Delta(x - y),$$

w jawnej postaci wyraża się wzorem

$$\Delta(x - y) = \imath\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(e^{-\imath k(x-y)} - e^{\imath k(x-y)}).$$

Ile wynosi $[\phi(x), \phi(y)]$?

Zad.3

Wyrazić hamiltonian zespolonego pola skalarnego

$$H = \int d^3x((\partial_0\phi^\dagger)(\partial_0\phi) + \nabla\phi^\dagger \cdot \nabla\phi + m^2\phi^\dagger\phi)$$

przez operatory kreacji i anihilacji.

Zad.4

Dla swobodnego pola Diraca

- wyrazić hamiltonian
$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3x\Psi^\dagger\imath\partial_0\Psi,$$
przez operatory kreacji i anihilacji;

- znaleźć prąd zachowany j^μ wynikający z niezmienniczosci teorii względem globalnej transformacji cechowania
$$\Psi(x) \;\rightarrow\; \Psi'(x) = e^{-\imath\alpha}\Psi(x),$$
(α jest stalą faza) oraz ładunek $Q = \alpha \int d^3 x j^0$.

- Wyrazić te wielkości przez operatory kreacji i anihilacji.

Zad.5

Sprawdzić, że w obrazie oddziaływania, w którym ewolucja czasowa operatorów $A_I(t)$ jest opisana przez swobodny hamiltonian H_0 zgodnie z

$$A_I(t) = e^{iH_0 t} A e^{-iH_0 t},$$

operatory pola skalarnego $\phi_I(x)$, $\pi_I(x)$ spełniają te same relacje komutacyjne, co w obrazie Schrödingera, tzn.
$$[\phi_I(\vec{x}, t), \pi_I(\vec{y}, t] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Zad.6

Wyprowadzić z definicji (podobnie jak na wykładzie dla teorii ABC) w najniższym nieznikającym rzędzie element macierzowy operatora S dla

- procesu rozpraszania Comptona
$$\gamma(k, \lambda) + e^-(p, s) \rightarrow \gamma(k', \lambda') + e^-(p', s')$$

- procesu anihilacji
$$e^-(p, s) + e^+(p', s') \rightarrow \gamma(k, \lambda) + \gamma(k', \lambda')$$

- procesu rozpraszania Bhabha
$$e^-(p, s) + e^+(p', s') \rightarrow e^-(k, r) + e^+(k', r')$$

Zad.7

Pokazać, że propagator Feynmana pola skalarnego, rzeczywistego $F(x_1, x_2) = \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$ jest funkcją Greena równania Kleina-Gordona, tzn. spełnia równanie

$$(\Box_{x_1} + m^2) F(x_1, x_2) = -i\delta^{(4)}(x_1 - x_2).$$

Uwaga: można to zrobić bezpośrednio z definicji propagatora lub z jego jawnej postaci.