Wstęp do teorii oddziaływań fundamentalnych
Seria zadań domowych 1

Zad. 1

Jaki musi być pęd protonów w ukladzie LAB (nieruchoma tarcza), aby energia całkowita w układzie CMS wyniosła 14 TeV (tak jak w LHC)?

Zad. 2

Wykaz równość:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_k} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0),$$

przy czym funkcja $\theta(x) = 1$ dla $x \geq 0$ i $\theta(x) = 0$ dla $x < 0$. Ponadto przydatne mogą się okazać:

$$\delta[y(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|y'(x_i)|}, \qquad y' = \frac{dy}{dx}, \qquad x_i - \text{bieguny } y(x).$$

Czy obiekt ten jest niezmienniczy lorentzowsko?

Zad. 3

Dla dwuciałowej przestrzeni fazowej pokazać, że

- $\int \frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^{(4)}(P - p_1 - p_2)f(p_1 \cdot p_2) = \frac{\pi\lambda(P^2,m_1^2,m_2^2)}{2P^2}\, f(\frac{1}{2}(P^2 - m_1^2 - m_2^2))$
- $\int \frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\delta^{(4)}(P - p_1 - p_2)f(p_1 \cdot p_2)p_\mu^2 = \frac{\pi\lambda(P^2,m_1^2,m_2^2)}{4P^4}(P^2 + m_2^2 - m_1^2)\, f(\frac{1}{2}(P^2 - m_1^2 - m_2^2))\, P^\mu$

gdzie $m_i^2 = p_i^2, \quad \lambda(a,b,c) = (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)^{1/2}$.

Zad. 4

O niezmiennikach s, t, u:

- Dla procesu $a+b \to c+d$ pokaż, że zmienne Mandelstama $s = (p_a+p_b)^2$, $t = (p_a-p_c)^2$, $u = (p_a - p_d)^2$ spełniają $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$.
- Znaleźć związek między różniczkowym przekrojem czynnym w układzie CM i LAB (przy ustalonym s)? Warto wykorzystać fakt, że s i t nie zależą od układu (niezmienniki). Całkowity przekrój czynny σ (miara liczby cząstek rozproszonych w jakimkolwiek kierunku) jest niezmiennikiem, tak wiec $\frac{d\sigma}{dt}$ również4. W układzie CM mamy:

$$\frac{d\sigma}{dt} = [\frac{1}{2p_1p_3}\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{13}}]^{CM} = [\frac{\pi}{p_1p_3}\frac{d\sigma}{d\Omega}]^{CM}.$$

  Wyznacz zależnosc miedzy $(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{CM}$ a $(\frac{d\sigma}{d\Omega})^{LAB}$.

Zad. 5

Dla zespolonych wektorów polaryzacji:

$$\begin{aligned} e(\vec{k},1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{l}_1(\vec{k}) + \imath\vec{l}_2(\vec{k})), \\ e^*(\vec{k},1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{l}_1(\vec{k}) - \imath\vec{l}_2(\vec{k})), \\ e(\vec{k},2) &= \frac{\imath}{\sqrt{2}}(\vec{l}_1(\vec{k}) + \imath\vec{l}_2(\vec{k})), \\ e(\vec{k},2) &= \frac{\imath}{\sqrt{2}}(\vec{l}_1(\vec{k}) - \imath\vec{l}_2(\vec{k})), \end{aligned}$$

gdzie $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ są wektorami rzeczywistymi i unormowanymi oraz spełniającymi:

$$\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \frac{\vec{k}}{|k|},\ \vec{l}_1 \cdot \vec{k} = \vec{l}_2 \cdot \vec{k} = 0,$$

pokazać, że zachodzi:

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e_i(\vec{k},\lambda) e_j^*(\vec{k},\lambda) = \delta_{ij} - \frac{k_i\, k_j}{k^2}.$$

Zad. 6

Spinory $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ transformują się względem grupy SU(2) tak, że

$$\xi\xi^\dagger \rightarrow U\xi\xi^\dagger U^\dagger, \qquad U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Zakładając, że obiekt χ zbudowany ze składowych wektora $\vec{r} = (x, y, z)$ w następujący sposób

$$\chi = \begin{pmatrix} z & x - \imath y \\ x + \imath y & -z \end{pmatrix}$$

transformuje się jak $\xi\xi^\dagger$, napisz

- jawną postać transformacji dla wektora $\vec{r} = (x, y, z)$,
- jak wyglada ta transformacja gdy $b = 0$, $a = e^{\imath\alpha/2}$,
- znajdź a i b odpowiadające obrotom wokoł osi y i x.

Zad. 7

Lagranżjan cząstki o masie m i ładunku q poruszającej się w polu elektromagnetycznym dany jest

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - q\Phi,$$

gdzie $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ i $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ są wektorowym i skalarnym potencjałem pola elektromagnetycznego w miejscu znajdowania się cząstki $\mathbf{r}$ w chwili t (symbol z kropką oznacza pochodną po czasie).

a. pokazać, że $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ jest pędem sprzężonym do $\mathbf{r}$,

b. równanie Eulera-Lagrange'a ma postać

$$m\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} = q[\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}]$$

c. znaleźć hamiltonian i równania Hamiltona.

Zad. 8

Sprawdzić, że dodanie do lagranżjanu pełnej 4-dywergencji dowolnej funkcji pól nie zmienia równań ruchu.

Zad. 9

Pokazać, że lagranżjan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[\partial_\alpha \Phi_\beta][\partial^\alpha \Phi^\beta] + \frac{1}{2}[\partial_\alpha \Phi^\alpha][\partial_\beta \Phi^\beta] + \frac{m^2}{2}\Phi_\alpha \Phi^\alpha$$

dla rzeczywistego pola wektorowego $\Phi - \alpha$ prowadzi do równa'N ruchu postaci

$$[g_{\alpha\beta}(\Box + m^2) - \partial_\alpha \partial_\beta]\Phi^\beta = 0$$

i że pole Φ spełnia warunek Lorentza $\partial_\alpha \Phi^\alpha = 0$.

Zad. 10

Przy przesunięciu współrzędnych $x_\alpha \to x'_\alpha = x_\alpha + \delta_\alpha$, gdzie δ jest ustalonym 4-wektorem, pole skalarne ϕ nie ulega zmianie, tz. $\phi'(x') = \phi(x) \quad$ (czyli $\phi'(x) = \phi(x_\alpha - \delta_\alpha)$). Pokazać, że odpowiadająca temu unitarna transformacja pola

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U\phi(x)u^\dagger$$

dana jest przez $U = exp\{-i\delta_\alpha P^\alpha\}$, gdzie P^α jest 4-pędem pola ϕ.

Zad. 11

Niech $\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Wyprowadzić następujące tożsamości

a. $\gamma_5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

b. $\gamma_\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda = -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu$

c. $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$

d. $Tr(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

Zad. 12

Dla pola Diraca transformacja

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x),$$

gdzie α jest dowolnym parametrem rzeczywistym, nosi nazwę transformacji chiralnej.

a. Pokazać, że lagranżjan $\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$ w granicy $m \to 0$ jest niezmienniczy względem transformacji chiralnych.

b. Wyprowadzić równania ruchu dla pól

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi(x), \qquad \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi(x)$$

przy niezerowej masie m i pokazać, że równania te rozprzęgają się w granicy $m \to 0$.