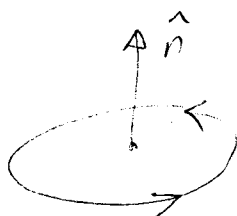


Catki kryształowe i powierzchniowe

Catki kryształowe i powierzchniowe stanowią dalsze uogólnienie pojęcia catki na przypadkach, gdy odcięta prostoliniowa w catce jednokrotnej orientowanej staje się dowolną krzywą w płaszczyźnie lub w przestrzeni, a płaska obszar catki również w catce dwukrotnej rośnie. Zastąpiamy dowolny płatem jakiejś powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej.

Spójrzmy najpierw z punktem powierzchni orientowanej, ten także dla której wektor normalny do niej we mnie zwrotu przy transport tego wektora po dowolnym konturze na tej powierzchni. Ta sfera jest zorientowana, a przykładem powierzchni nieorientowanej (nieorientowalnej) jest wstęga Möbiusa.

W przypadku krzywych zamkniętych możemy just wybrać „obieg” tej krzywej. Jeśli krzywa zamknięta jest brzołem jakiejś powierzchni orientowalnej, to będziemy stosować konwencję wyboru „obiegu” krzywej zgodnie z regułą „śruby prawoskrętnej”, ten skutek obrotowa zgodnie z obiegiem krzywej na powierzchni jest w kierunku wektora normalnego do tej powierzchni.



# 4.1. Całki krzywoliniowe na płaskiej powierzchni 4.2

Def: Całki krzywoliniowe zorientowane.

Nech na płaszczyźnie będzie dane krzywa  $\vec{C}$  o początku w punkcie A i końcu w punkcie B,  $\vec{C} = \overrightarrow{AB}$ .  
 Krzywa ta parametryzujemy parametrem  $t$ , tak aby  
 $A = (x(t_A), y(t_A))$ ,  $B = (x(t_B), y(t_B))$ . Zakładamy, że  
 $x(t)$  i  $y(t)$  są i (przez skończony liczbę punktów) różniczkowalne. Krzywa  $\overrightarrow{AB}$  może być albo np. łamana.  
 Jeśli  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  są pewnymi funkcjami dwóch zmiennych na płaszczyźnie i krzywa  $\overrightarrow{AB}$  nie ma zatamania, to zorientowaną całość krzywoliniową definiujemy wrażliwym

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_A}^{t_B} \left( P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt$$

jeśli całość po prawej stronie istnieje.

Gdy krzywa  $\overrightarrow{AB}$  ma zatamania w punkcie C, to

$$\int_{\overrightarrow{AB}} \equiv \int_{\overrightarrow{AC}} + \int_{\overrightarrow{CB}}$$



Jeśli więcej zatamania, to przyjmujemy dalej z podziałem jej na części „bez zatamania”.

Zauważamy, że 1)  $\int_{\overrightarrow{AB}} = - \int_{\overrightarrow{BA}}$

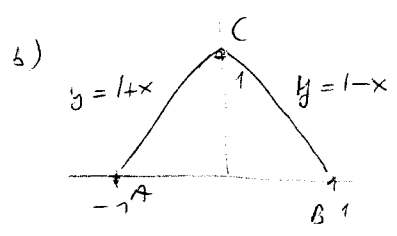
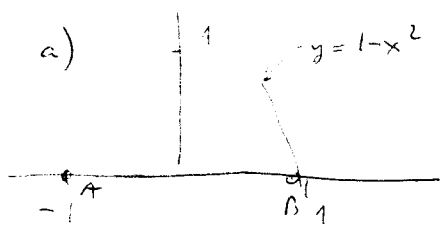
2) macie jest crasem parametryzacji krzywej z pomocą np. zmiennej  $x$ , tzn  $y(x)$ . Wtedy

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P dx + Q dy = \int_a^b \left( P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \frac{dy}{dx} \right) dx.$$

Jeśli krzywa AB jest zamknięta, to możliwe są dwa "obrotu" krzywej. Będziemy stosować wtedy oznaczenie

$$\oint_C P dx + Q dy = - \oint P dx + Q dy$$

Przykład: Obliczyć  $\int_{\vec{AB}} y dx - x dy$ , gdzie



$$a) \int_{\vec{AB}} y dx - x dy = \int_{-1}^1 dx \left( (1-x^2) - x(-2x) \right) = \frac{8}{3}$$

$$b) \int_{\vec{AB}} y dx - x dy = \int_{-1}^0 dx \left( (1+x) - x(1) \right) + \int_0^1 dx \left( (1-x) - x(-1) \right) = 2$$

Def. Obszar D na płaszczyźnie kartezjańskiej ściągającym lub jednospójnym, jeśli dowolny krzywy zamknięty w tym obszarze da się ściągnąć do punktu należącego do tego obszaru. Obszarami niedziśgalnymi są obszary, które mają w swoim wnętrzu polebrany lub punkty, które do nich nie należą. Ale ten przykład walca nie jest ściągającym do punktu

# 4.1 Twierdzenie Greena (dla całej krzywoliniowej na płaskiej parcieczce) 4.4

Dla obszarów świąganych zachodzi (wówczas w analizie zmiennych resp. long, a czym w Rozdziale 5)

twierdzenie:

Jest.  $P, Q$  oraz ich pochodne  $\frac{\partial P}{\partial y}$  i  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  są ciągłe wewnątrz i na brzoju  $K$ -owego świąganego obszaru  $D$ , to

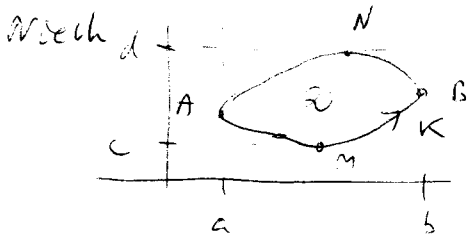
$$\oint_K P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

gdzie kontur  $K$  jest zorientowany "przeciw do ruchu wskazówek", ten zgodny z wektorem normalnym do obszaru  $D$  wskazywanym osi "z-owa".

Zachodzi również:

$$\oint_K P(x,y) dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

$$\oint_K Q(x,y) dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$



Zakładamy, że cała iteracyjnie istnieje.

Niech krzywe  $AMB$  opisana jest przez  $y_2(x)$  i  $AMB$  " " " "  $y_1(x)$

$$\int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]$$

$$= \int_{\widehat{AMB}} P(x,y) dx - \int_{\widehat{AMB}} P(x,y) dx =$$

$$= - \int_{\widehat{BMA}} P(x,y) dx - \int_{\widehat{AMB}} P(x,y) dx = - \oint_K P(x,y) dx$$

Drugą stronę udowodnimy podobnie.

Jeśli obszar całkowicie nieregularny, to dzielimy go na mniejsze, a każdy z nich jest takim obszarem, iż możemy stosować całość iteracyjną. Dla każdego takiego obszaru jest wzór Greena. Teraz sumujemy stronami te równania dostajemy z jednej strony całość po całym obszarze, a z drugiej całość krzywoliniową po jego brzegu.

Tw: o niezależności całości krzywoliniowej zorientowanej od drogi całkowania.

Niech  $D$  ściągający, w którym funkcje  $P, Q$  oraz ich pochodne  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  ciągłe. Wówczas całość krzywoliniowa zorientowana

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$$

nie zależy od krzywej łączącej punkty  $A, B$  (ale łączącej w  $D$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Dowod: 1) jeśli całość krzywoliniowa nie zależy od drogi, to dowód przebiega następująco.

Niech  $B(x, y), B_1(x+h, y), B_2(x, y+h), A$  - pewien punkt

określony  $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = F(x, y)$

$$\int_{\widehat{AB_1}} Pdx + Qdy = F(x+h, y), \text{ itd}$$

Z addytywności całości mamy,

$$\int_{\widehat{AB_1}} Pdx + Qdy = \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + \int_{\widehat{BB_1}} Pdx + Qdy$$

Konstytucja 2 oznaczeni miany

$$F(x+h, y) - F(x, h) = \int_{\widehat{AB}_1} - \int_{AB} = \int_{\widehat{CB}_1} Pdx + Qdy$$

Krzywa  $\widehat{CB}_1$  jest oddzielona równoległym do osi  $y$ , a więc w każdej pkt  $\widehat{CB}_1$  mamy  $dy = 0$  i

$$\int_{\widehat{CB}_1} Pdx + Qdy = \int_x^{x+h} Pdx \approx h P(x, y) \text{ dla małych } h$$

w granicy  $h \rightarrow 0$

$$P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$$

Analogicznie dostajemy  $Q(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$

Stąd  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  c.d.o.

2) Teraz doświadczenie drugie. Weźmy jakiś kontur  $C \subset D$  od punktu  $A$  do  $B$ . Umpiętnijmy go o dodatkowy kontur od  $B$  do  $A$ , żeby dostać kontur zamknięty. Ten pierwszy oznaczaemy przez  $K_1 = \widehat{AB}$ , ten drugi przez  $K_2 = \widehat{BA}$ .  
Z tu Greena

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int_{K_1} Pdx + Qdy + \int_{K_2} Pdx + Qdy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Stąd całość po konturach  $K_1$  i  $K_2$  się równa 0 przeciwnego znaku. Oddzielając orientację kontur  $K_2$  (żeby był też od  $A$  do  $B$ ), dostajemy równość całości po dwóch różnych konturach zaczynających się w  $A$  i kończących w  $B$ . c.d.o.

Jeśli weźmiemy  $D$  są punkty (lub obszary), gdzie  $P \in Q$  nie są ani  $\frac{\partial P}{\partial y}$  i  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  nie są ciągłe, to całka po krzywej zamkniętej nie musi zniknąć.

Pokazuje to następujący

Przykład  $\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$

Podstaw  $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ,  $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ ,  
 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$   $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Ale w punkcie  $(x,y) = (0,0)$  funkcje  $P$  i  $Q$  nie są ciągłe. Jeśli kontur  $C$  obejmuje punkt  $(0,0)$ , to zatemnia powyższego twierdzenia nie są spełnione i całka  $\neq 0$ . Weźmy np. kontur  $C$  w postaci okręgu o prom.  $R$  i środkiem  $(0,0)$ . Parametryzacji tego konturu  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \varphi$ , więc powyższa całka

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi}{R^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

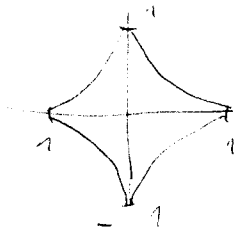
Taki sam wynik dostaniemy dla dowolnego konturu obejmującego punkt  $(0,0)$  (okrągłego). Jeśli kontur obejmuje dwukrotnie punkt  $(0,0)$  to całka wynosi  $2 \cdot 2\pi$ .

# Zastosowania do obliczenia pól.

(4.8)

Pomysł: twierdzenie pozwalające obliczyć pole figury za pomocą całki kring-solinowej

Przykład: Obliczyć pole figury, której brzeg dany jest równaniem  $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ .



(asteroide)

$$\iint_D dx dy \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Jeśli wybierzemy  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \Rightarrow Q = x, P = -y$$

to

$$2 \iint_D dx dy = \oint_{\partial D} x dy - y dx$$

Pole asteroidey: trzeba sparametryzować brzeg

asteroidey. Jeśli wybierzemy  $x = \cos^3 \varphi, y = \sin^3 \varphi$ , to

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad \checkmark$$

Wzrost

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \oint x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^3 \varphi \cdot 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \sin^3 \varphi \cdot 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$



# 4.2 Catki kugolostienne w najogymianowej przeszreni

Roine wodroye cateki kugolostiennej  
ds - element luku kuglej

1) wzrowiatowanie

$$\int_K \phi(\vec{r}) ds \quad - \quad \text{wielkosc skalarna}$$

$$\int_K \vec{A}(\vec{r}) ds \quad - \quad \text{wielkosc wektorowa}$$

nie zalezy od orientacji kuglej

2) zorientowanie

$$\int_C \vec{A} d\vec{l} \quad - \quad \text{wielkosc skalarna}$$

$$\int_C \vec{A} \times d\vec{l} \quad - \quad \text{wektorowa}$$

$$\int_C \phi(r) d\vec{r} \quad - \quad \text{wektorowa}$$

Zdefiniowanie  $s_s$  w ust. spisob (przez parametryzacje)  
kierunek  $\vec{r}(t)$

$$\int_C \phi(\vec{r}) ds = \int_{t_1}^{t_2} \phi(\vec{r}(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \phi(\vec{r}(t)) \sqrt{h_u^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(h_v \frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(h_w \frac{dw}{dt}\right)^2} dt$$

$$\int \vec{A} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Przyklad obliczenie pracy sily  $\vec{F}$  wzdlok kuglej  
zorientowanej  $\vec{AB}$

$$W = \int_{\vec{AB}} \vec{F} d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

$$\left( \text{ale } \vec{F} = m \vec{v} \right) = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{v} \cdot \vec{v} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) dt$$

### 4.3 całki powierzchniowe w $\mathbb{R}^3$

Znamy już wyrażenie na element powierzchni

$$d\vec{S} = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv \quad (\text{orientowany})$$

$$dS = |d\vec{S}| \quad (\text{nieorientowany})$$

Typy całek

1) całki powierzchniowe nieorientowane

$$\int_S \phi(\vec{r}) dS \quad \text{skalarne}$$

$$\int_S \vec{A}(\vec{r}) dS \quad \text{wektorowa}$$

2) całki powierzchniowe orientowane

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \text{skalarne}$$

$$\int_S \vec{A} \times d\vec{S} \quad \text{wektorowa}$$

Jeśli powierzchnia jest gładka (bez zagłębienia)

to całki te definiujemy następująco. Wybieramy parametryzacji powierzchni przez  $u, v$  i definiujemy

$$\int_S \phi(\vec{r}) dS = \int_{\mathcal{D}_S} \phi(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \phi(\vec{r}(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

gdzie  $\mathcal{D}$  jest rzutem  $S$  na płaszczyznę  $xy$

Dla całki orientowanej podobnie; np:

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \pm \int_S \vec{A}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv =$$

$$= \pm \int_S \left( A_x(\vec{r}(u,v)) \frac{\partial y, z}{\partial u, v} + A_y(\vec{r}) \frac{\partial z, x}{\partial(u,v)} + A_z(\vec{r}) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) du dv$$

w powyższych warodach S oznacza granice całkowania w (u,v), a Q w (x,y).

Jeśli powierzchnie nie są płaskie (trzy podrodzaje  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$  nie są często) to dzielimy powierzchnię na kawałki płaskie, dla których obliczamy całki i uzyskane wyniki sumujemy. Przy całkach zorientowanych należy uważać na orientację zgodną dla wszystkich kawałków powierzchni (i ich brzoń, jeśli przechodzimy do całki po brzojach).

Podobnie jak dla całek krzywoliniowych, będziemy stosować oznaczenie  $\oint$  na całkach zorientowanych po powierzchniach zamkniętych.

#### 4.4. Twierdzenie Gaussa i Stokesa

Zamiast udowodnienia te twierdzenia udowodnimy związki operacji gradientu, dywergencji i rotacji z całkami powierzchniowymi lub krzywoliniowymi.

Gradient

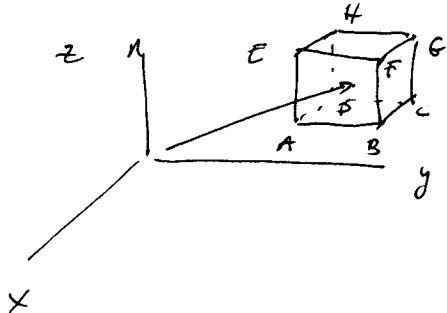
$$\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \oint_S \phi d\vec{S}$$

S jest powierzchnią zamkniętą i zorientowaną na zewnątrz otaczającą punkt  $\vec{r}$  i obejmującą

objętość  $V$ .

(4,12)

Dowód: Wyobraźmy jako  $S$  powierzchnię sześcianu o boku  $\delta$  i współwzrost wzdłuż osi  $xyz$  o środku w punkcie  $\vec{r}$



$$d\vec{s}_{ABCD} = -\hat{k} \delta^2, \quad d\vec{s}_{EFGH} = +\hat{k} \delta^2$$

$$d\vec{s}_{ABFE} = \hat{i} \delta^2, \quad d\vec{s}_{CDHG} = -\hat{i} \delta^2$$

$$d\vec{s}_{BCGF} = \hat{j} \delta^2, \quad d\vec{s}_{ADEH} = -\hat{j} \delta^2$$

$$\frac{1}{V} \oint \phi d\vec{s} \approx \frac{\delta^2}{\delta^3} \left[ \phi(\vec{r} + \frac{1}{2}\delta\hat{i}) \hat{i} - \phi(\vec{r} - \frac{1}{2}\delta\hat{i}) \hat{i} + \right. \\ \left. + \phi(\vec{r} + \frac{1}{2}\delta\hat{j}) \hat{j} - \phi(\vec{r} - \frac{1}{2}\delta\hat{j}) \hat{j} + \right. \\ \left. + \phi(\vec{r} + \frac{1}{2}\delta\hat{k}) \hat{k} - \phi(\vec{r} - \frac{1}{2}\delta\hat{k}) \hat{k} \right]$$

ale  $\phi(\vec{r} + \frac{1}{2}\delta\hat{i}) - \phi(\vec{r} - \frac{1}{2}\delta\hat{i}) \approx \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial x} \delta$

więc  $\frac{1}{V} \oint \phi d\vec{s} \approx \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$

w granicy  $V \rightarrow 0$  dostajemy

$$\lim_{V \rightarrow 0} \oint \phi d\vec{s} = \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$$

Podobnie, dywergencja

$$\frac{1}{V} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} \approx \frac{1}{\delta} \left[ \vec{A}(\vec{r} + \frac{1}{2}\hat{i}\delta) \cdot \hat{i} - \vec{A}(\vec{r} - \frac{1}{2}\hat{i}\delta) \cdot \hat{i} + \right. \\ \left. + (\vec{A}(\vec{r} + \frac{1}{2}\delta\hat{j}) - \vec{A}(\vec{r} - \frac{1}{2}\delta\hat{j})) \cdot \hat{j} + \right. \\ \left. + (\vec{A}(\vec{r} + \frac{1}{2}\delta\hat{k}) - \vec{A}(\vec{r} - \frac{1}{2}\delta\hat{k})) \cdot \hat{k} \right] \\ \approx \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

interpretacja.

ii Analogicznie dowodzimy

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_{\partial V} d\vec{S} \times \vec{A} = \lim_{\delta \rightarrow 0}$$

$$\frac{1}{\delta} \left[ \vec{c} \times \left( \vec{A}(\vec{r} + \frac{1}{2}\delta\vec{c}) - \vec{A}(\vec{r} - \frac{1}{2}\delta\vec{c}) \right) + \dots \right]$$

$$= \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_{\partial V} d\vec{S} \times \vec{A}}$$

w powyższych dowodach wybraliśmy objętość  $V$  w postaci sześcianu o nieskończenie małym boku  $\delta$ , ale nie jest to założenie ograniczające. Każdą nieskończenie małą objętość można podzielić na jeszcze mniejsze sześciany. Biorąc sumę całości od każdej sześcianów należy pamiętać, że całości zorientowane od stykających się ścian kładą się. Stąd wynika że dowolnej powierzchni  $S$  otaczającej objętość  $V$  jest taki sam.

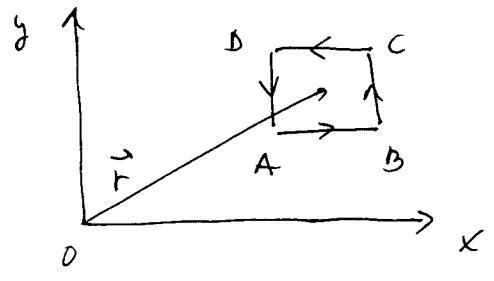
Podobny charakter ma wzór

$$\boxed{(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\vec{c}} \vec{A} \cdot d\vec{r}}$$

gdzie wektor normalny  $\vec{n}$  jest do powierzchni  $S$ , której kontur zorientowany przeciwnie do kierunku  $\vec{c}$

Aby pokazać ten wzór jako  $S$  wybieramy kwadrat ~~kwadrat~~ zorientowany otaczający punkt  $\vec{r}$ , gdzie każdy powierchnię możemy podzielić na małe ~~kwadraty~~ kwadraty

Niech ten kwadrat leży w płaszczyźnie  $xy$ .



Centrum tego kwadratu, punkt ten i wektor  $\vec{r}$  nie przesunęły  $Oxy$

$$\int_{\vec{AB}} \vec{A} \cdot d\vec{r} \approx \vec{A} \left( \vec{r} - \frac{1}{2} \delta \hat{j} \right) \delta \hat{u}$$

bo na brzegu  $\vec{AB}$   $d\vec{r} = \delta \hat{u}$ , a bok  $AB$  leży o  $-\frac{1}{2} \delta$  w stronę mniejszych wartości  $y$  niż środek kwadratu  $\vec{r}$ .

Co prowadzi na brzegu  $AB$  zmienia się współrzędna  $x$ , po której całujemy, ale ta zmiana jest jmi ujemnego rodzaju  $\sim dx$ .

$$\int_{\vec{CD}} \vec{A} \cdot d\vec{r} \approx \vec{A} \left( \vec{r} + \frac{1}{2} \delta \hat{j} \right) \delta \hat{u}$$

Analogicznie  $\int_{\vec{BC}} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{DA}} \vec{A} \cdot d\vec{r} \approx \vec{A} \left( \vec{r} + \frac{1}{2} \delta \hat{u} \right) - \vec{A} \left( \vec{r} - \frac{1}{2} \delta \hat{u} \right) \delta \hat{j}$

rozwijając  $\left[ \vec{A} \left( \vec{r} + \frac{1}{2} \delta \hat{u} \right) - \vec{A} \left( \vec{r} - \frac{1}{2} \delta \hat{u} \right) \right] \cdot \hat{j} \approx \frac{\partial A_j}{\partial x} \cdot \delta$

i sumując wkłady, mamy

$$\oint_{ABCD} \vec{A} \cdot d\vec{r} \approx \frac{\partial A_y}{\partial x} \delta^2 - \frac{\partial A_x}{\partial y} \delta^2 =$$

$$= \left( \text{rot } \vec{A} \right)_z \delta^2 = \text{rot } \vec{A} \cdot \hat{k} S$$

gdzie  $S = \delta^2$  i wektor normalny  $\hat{k}$

Uwaga.

(4.15)

Chociaż pokazaliśmy ten wzór dla kwadratu, możemy go (rozumowanie analogiczne do poprzednich części), że wynika od tego nie zależy. Różnica nie zależy od tego, czy kwadrat ten leży w płaszczyźnie  $(x, y)$  bo jeśli leży w innej to możemy sobie wybrać układ współrzędnych (wzór nie zależy od wyboru układu współrzędnych!) tak, aby ten kwadrat znalazł się w pł.  $(x, y)$ .

Interpretacja rotacji: krzywizna pola wektorowego  $\vec{A}$  wokół punktu  $\vec{r}$ . „Doświadczenie” może „zmierzyć” składową mody wiadrach w punkcie  $\vec{r}$  wstyg na pole  $\vec{A}$  i sprawdzać, czy się obraca. Tak można, jeśli  $\vec{A}$  jest polem prędkości jakiegoś ciała.

### Twierdzenie Gaussa

Rozważamy obszar o objętości  $V$  otoczony zamkniętą, zorientowaną powierzchnią  $\vec{S}$ . Podzielimy objętość  $V$  na małe różniczkowe kawałki o objętości  $V_i$  z powierzchniami  $S_i$ . Jeśli te kawałki są infinitesymalnie małe, to dla każdego z nich zachodzi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, V_i = \iint_{\vec{S}_i} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Sumując stronami po  $i$ , po lewej stronie dostajemy w granicy  $\epsilon \text{rot} \vec{e}_i$  po całej objętości  $V$ . Po prawej stronie wchodzi do sumy od stykających się ścian kątów się (bo  $s_3$  to cała powierzchnia orientowana!) : dostajemy ostatecznie całkę powierzchniową ~~od~~ ~~od~~ po otaczającej powierzchni  $S$ . Udowodnimy więc

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r = \int_V \text{div} \vec{A} d^3r = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Analogicznie

$$\int_V \vec{\nabla} \phi d^3r = \int_V \text{grad} \phi d^3r = \oint_S \phi(\vec{r}) d\vec{s}$$


---


$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{A} d^3r = \int_V \text{rot} \vec{A} d^3r = \oint_S d\vec{s} \times \vec{A}$$

Przykład: weźmi  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

Jest wszędzie z wyjątkiem pochodnym poza punktem  $\vec{r} = 0$ .

Sprawdźmy bezpośrednio wadunkiem, że poza  $\vec{r} = 0$  dywergencja tego pola równa jest zero  $\text{div} \vec{A} = 0$  dla  $\vec{r} \neq 0$ .



Zatem jeśli  $V$  nie obejmuje punktu  $\vec{r}=0$ , to

4.17

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} d^3r = 0 = \oint_{\hat{S}} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{S}$$

ten strumień pola  $\vec{A}$  przez zamknięte powierchnię  $\hat{S}$  nie obejmując  $\vec{r}=0$  wynosi zero. Tyle samo  $\vec{A}$  „wspływa” co i „wspływa” z obszarem  $V$ .

Wiermy teraz powierchnię otaczającą  $\vec{r}=0$ .

Lewej strony prawa Gaussa nie możemy obliczyć, gdyż nie wiemy, ile wynosi  $\operatorname{div} \vec{A}$  w punkcie  $\vec{r}=0$ . Ale możemy obliczyć prawą stronę. Wiermy jako  $\hat{S}$  sferę o promieniu  $R$  o środku w początku współrzędnych.

Wtedy  $d\hat{S} = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_R$

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \quad \text{więc}$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^2}{R^2} = 4\pi.$$

Dywergencja pola  $\vec{A}$  w punkcie  $\vec{r}=0$  musi być więc różna od zera. Punkt  $\vec{r}=0$  jest „źródłem” pola  $\vec{A}$ .

# Twierdzenie Stokesa

Przy pominięciu wyprzedzony wior

$$(\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Twierdzenie Stokesa jest całkowy wersją tego wior.

Postępujcie podobnie, jak przy tw. Gaussa,

zorientowany ~~powierzchnią~~ <sup>plac</sup> S możemy pokryć małymi kawałkami o powierzchni  $dS$  i wektorem normalnym  $\vec{n}$ .

Dla elementu  $d\vec{S}$  mamy

$$(\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial dS} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

gdzie kontur  $\partial dS$  ~~sta~~ jest konturem zorientowanym (zgodnie z konwencją "prawy śruby") obejmującym element  $dS$  powierzchni. Sumując ten wior stronami po wszystkich kawałkach  $dS$  dostajemy z lewej strony w granicy całkę powierzchniową po  $S$ , a po prawej stronie całkę konturową po  $\partial S$  (bo składy od kawałków wewnętrznych się - bo to są całości zorientowane!). Dostajemy więc

$$\int_{\hat{S}} (\nabla \times \vec{A}(\vec{r})) \cdot d\vec{S} = \oint_{\vec{r}=\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Uwaga: Jeśli powierzchnie  $S$  jest zamknięta, (4.19)  
to mię ma bieżę, więc całka po prawej stronie = 0

$$\oint_{\vec{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = 0$$

Stosując teraz czołę gęę Gaussa do tej tożsamości, mamy

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d^3r = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \text{div rot } \vec{A} = 0, \text{ co kę}$$

terę jui wreszciej pokazywaliśmy.

### Twierdzenie o nierozdzielności od drogi

Jeśli w ścisgłym obszarze  $\mathcal{D}$  pole wektorowe  $\vec{A}$  wraz z pochodnymi jest ciągłe, to całka krzywoliniowa po zamkniętej krzywej zawartej w  $\mathcal{D}$  i łączącej dwa ustalone punkty nie zależy od drogi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pole skalarne  $\phi$ , że  $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r})$

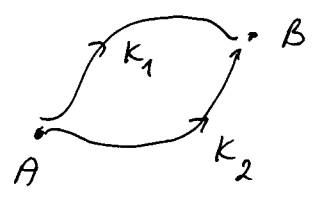
Dowód:

$\Leftarrow$  jeśli  $\vec{A} = \vec{\nabla} \phi$ , to dla konturu  $\vec{AB}$

$$\int_{\vec{AB}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{AB}} \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\phi(\vec{r})}{dt} dt = \phi(t_B) - \phi(t_A)$$

gdzie  $\vec{r}(t)$  jest parametryzacją krzywej  $\vec{AB}$ .

⇒ Jesli carka nie zalezy od drogi, to znamy



$$\int_{\vec{K}_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{K}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Stąd  $0 = \int_{\vec{K}_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{K}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{K}_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} +$

$$+ \int_{\vec{K}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_{\vec{K}_1 + \vec{K}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{tw. Stokesa}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

To moze zreducowac dla dowolnych  $A, B \in \mathcal{D}$ , a wyc dla dowolnego, zamknietego konturu  $C \subset \mathcal{D}$ , a wyc dla dowolnego plata  $S \subset \mathcal{D}$ . To oznacza, ze

funkcje podcalkowe zmike  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$ .

A jak wiadomo, jesli rotacja  $\vec{A}$  zmike, to  $\vec{A}$  moze przedstawic jedn gradient pewnego pola skalarnego.