Rozdział 3

Całki wielokrotne

3.1. Całki wielokrotne we wsp. kartezjańskich

Przypomnienie całki jednokrotnej

→ Całka nieoznaczona $F(x) = \int f(x)dx$, gdy $F'(x) = f(x)$

całka nieoznaczona jest funkcją $x \to F(x)$

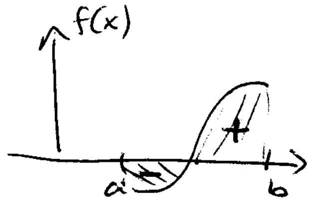
- całkowanie przez podstawienie $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

- całkowanie przez części

$$\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx$$

→ Całka oznaczona

$$\int_a^b f(x)\, dx$$ = pole 

pod $f(x)$

całka oznaczona jest liczbą

→ Związek między całką nieoznaczoną i oznaczoną;

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad F'(x) = f(x)$$

Długość krzywej $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\quad a \le t \le b$

$$d = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Objętość bryły obrotowej $y = y(x)$, $y \geq 0$

obrót wokół osi x-ów

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

Całki wielokrotne

całka dwukrotna: $f(x,y)$, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$

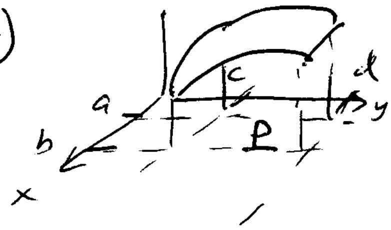
Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, dzielimy przedział $[a,b]$ na n przedziałów $[x_i, x_{i+1}]$ oraz przedział $[c,d]$ na m przedziałów $[y_j, y_{j+1}]$.
Definiujemy sumę (uogólnienie sumy Darboux)

$$S^P = \sum_{i,j} f(x_i^P, y_j^P)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

gdzie $x_i \le x_i^P \le x_{i+1}$, $y_j \le y^P \le y_{j+1}$
dowolny punkt z tego małego prostokąta.

Jeśli istnieje granica S^P przy przejściu z $n, m \to \infty$ to tę granicę nazywamy ~~sa~~ całką podwójną

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$$



$$= \iint_P dx\,dy\, f(x,y)$$

$f(x_i^P, y_j^P)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$ jest objętością pod powierzchnią $f(x,y)$

Więc całka podwójna ma interpretację objętości zawartej pod powierzchnią $f(x,y)$.

Całkowanie jest operacją liniową, co oznacza że

$$\iint_P dx\,dy\,\big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big) = \alpha \iint_P dx\,dy\, f(x,y) + \beta \iint_P dx\,dy\, g(x,y)$$

Może się zdarzyć, że całki $\int dx \int dy f(x,y)$ i $\int dy \int dx\, f(x,y)$ istnieją, ale nie są równe.

<u>Przykład:</u> niech $0 \le x,y \le 1$, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \; \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\int_0^1 dy \int_0^1 dx \; \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

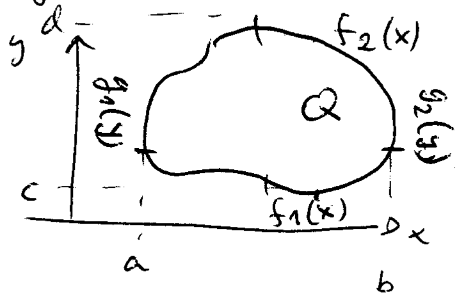
$$\int dy \; \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Wtedy mówimy o całkach iterowanych

<u>Twierdzenie</u> o całkach iterowanych:

Jeśli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła i ograniczona w P to obie całki iterowane istnieją i są równe.
Jest to twierdzenie również słuszne dla funkcji $f(x,y)$ o skończonym skoku na skończonej liczbie ciągłych krzywych zawartych w tym prostokącie P.

Uogólnienie na dowolny obszar $Q \subset R^2$



Obszar Q można opisać dwoma funkcjami $f_1(x)$ i $f_2(x)$

$$Q = \{(x,y): \; a \le x \le b, \; f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$
$$= \{(x,y): \; c \le y \le d \quad g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$$

wtedy

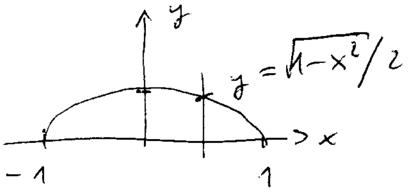
$$\iint_Q dx\,dy \; F(x,y) = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \; F(x,y) =$$

$$= \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx \; F(x,y)$$

Przykład

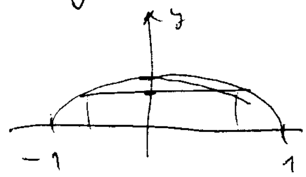
Obliczyć $\int_O y\,dx\,dy$, gdzie $O=\{(x,y):\ x^2+4y^2\le 1,\ y\ge 0\}$

O jest górną połówką elipsy. Obliczamy tę całkę iteracyjnie najpierw po y, a później po x. Całka po x jest wtedy od -1 do 1, a przy ustalonym x całka po y jest od 0 do $y=\sqrt{1-x^2}/2$



$$\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}/2} dy\ y = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2) = \frac{1}{6}.$$

Możemy ją wykonać w innej kolejności: najpierw po x, a potem po y. Wtedy granice całkowania po y są od 0 do $\frac{1}{2}$, a przy ustalonym y granice całkowania po x są od $-\sqrt{1-4y^2}$ do $+\sqrt{1-4y^2}$

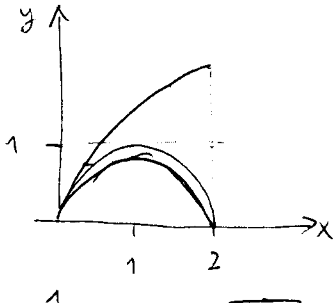


$$\int_0^{1/2} y\,dy \int_{-\sqrt{1-4y^2}}^{+\sqrt{1-4y^2}} dx = 2\int_0^{1/2} dy\ y\sqrt{1-4y^2} \underset{z=4y^2}{=} \frac{1}{4}\int_0^1 dz\,\sqrt{1-z} = \frac{1}{6}$$

Przykład

Obliczyć całkę z pewnej funkcji $f(x,y)$ po obszarze ograniczonym okręgiem $y^2=2x-x^2$ i prostą ~~$y=2x$~~ $x=2$ i krzywą $y^2=2x$

$(x-1)^2+y^2=1$



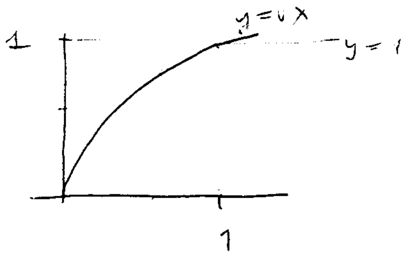
$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} dy\ f(x,y)$$

Żeby zapisać to jako całkę najpierw po x, trzeba to rozbić na całki po trzech kawałkach

$$\left[\int_0^1 dy\left(\int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} dx\right) + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^{2} dx\right] f(x,y)$$

W jakiej kolejności wykonywać całkowanie może istotnie zależeć od całkowanej funkcji co pokażemy

Przykład $\int\limits_{\mathcal{O}} e^{x/y}\, dx\, dy$ $\mathcal{O}$ jest ograniczone parabolą $y=\sqrt{x}$ i prostymi $x=0$, $y=1$



$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 dy\, e^{x/y} = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx\, e^{x/y}$$

Pierwszą całkę trudno obliczyć przez funkcję pierwotną. Można ją obliczać przez rozwinięcie w szereg i całkując wyraz po wyrazie. Łatwo za to obliczyć całkę po prawej stronie

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx\, e^{x/y} = \int_0^1 dy\, y\, e^{\frac{x}{y}}\Big|_0^{y^2} = \int_0^1 dy\left(ye^{y}-y\right) = \frac{1}{2}$$

Uogólnienie na przypadek całki potrójnej i wyżej wymiarowej jest natychmiastowe

Np: Jeśli w całce potrójnej obszar całkowania jest zadany w nast. sposób

$$\mathcal{O} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \quad a\le x\le b,\quad f_1(x)\le y\le f_2(x),\ g_1(x,y) z\le g_2(x,y)\}$$

to

$$\int\limits_{\mathcal{O}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz\quad f(x,y,z)$$

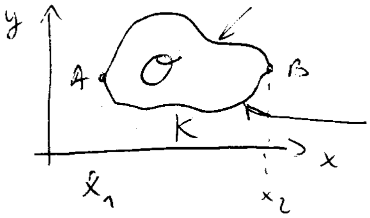
Dla całki podwójnej mamy dwie możliwe kolejności całkowania — dwie całki iteracyjne

Dla całki potrójnej mamy już sześć możliwości — sześć całek iteracyjnych.

Czasem brzegi całkowania są dane parametrycznie, które trudno jest rozwikłać.

Np. obszar (lub jego części) jest dany w postaci

$x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$. Niech to będzie „górna" granica całkowania po x.



$x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \; g(x,y) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{f_2(x)} dy \; g(x,y) - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{f_1(x)} dy \; g(x,y)$$

ale nie potrafimy przepisać $y = y_2(t),\ x = x_2(t) \Rightarrow y = f_2(x)$

Rozpatrzymy pierwszą całkę

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{f_2(x)} dy \; g(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \text{zamiana} \\ \text{zmiennych} \\ x = x_2(t) \end{array} \right\} = \int_{t_A}^{t_B} dt \, |\dot{x}_2(t)| \int_0^{f_2(x_2(t))} dy \; g(x_2(t), y) =$$

t_A i t_B odpowiadają wartościom parametru t, dla których dostajemy punkty A i B.

Teraz $f_2(x_2(t)) = y_2(t)$ więc

$$= \int_{t_A}^{t_B} dt \, |\dot{x}_2(t)| \int_0^{y_2(t)} f(x_2(t), y) \, dy$$

Podobnie postępujemy z drugą całką i dostajemy

$$\int_{\Theta} dx\, dy \; g(x,y) = \int_{t_A}^{t_B} dt \, |\dot{x}_2(t)| \int_0^{y_2(t)} g(x_2(t), y) \, dy \; -$$

$$- \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \, |\dot{x}_1(\tau)| \int_0^{y_1(\tau)} g(x_1(\tau), y) \, dy.$$

Przykład.

Obliczyć pole powierzchni pod cykloidą,

$$x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t \qquad \text{dla} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Funkcja całkowana jest $g(x,y) = 1$.

$$P = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{f_2(x)} dy, \qquad \text{gdzie} \qquad f_2(x) = \text{cykloida}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \, |1 - \cos t| \, (1 - \cos t) = \int_0^{2\pi} dt \, (1 - \cos t)^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t \right) = \int_0^{2\pi} dt \left(1 - 2\cos t + \frac{\cos 2t + 1}{2} \right) = 3\pi$$

3.2 Całki wielokrotne we współrzędnych krzywoliniowych

Czasem wygodnie jest przejść do współrzędnych krzywoliniowych przy obliczaniu całek wielokrotnych.

Przykład. Obliczyć pole koła o promieniu R.

$$P = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy = 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy$$

$$= 4 \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2} = \pi R^2$$

Ale we współrzędnych biegunowych $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

$ds = \rho \, d\rho \, d\varphi$

$$P = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \, \frac{1}{2}\rho^2 \Big|_0^R = \pi R^2.$$

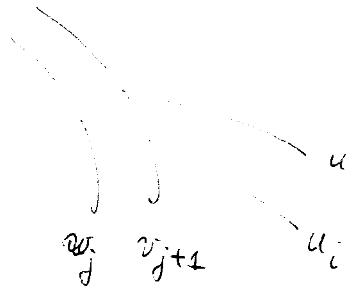
Oblicza się to łatwiej.

W ogólności

Niech na płaszczyźnie współrzędne krzywoliniowe (u, v)

$$f(x,y) = f(x(u,v),\, y(u,v))$$

Przedziały całkowania w u i v dzielimy na małe przedziały (u_i, u_{i+1}), (v_j, v_{j+1})



Przy coraz drobniejszym podziale dostajemy równoległoboki. Pole równoległoboku

$$P_{\square} = a \cdot b \cdot \sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Długości boków równoległoboku, to różniczki wektora położenia przy zmianie odpowiednio parametru u o du i v o dv

tzn $$|d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\, dv =$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| du\, dv = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| du\, dv$$

$$\equiv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$$

Więc

$$\boxed{\int_{\sigma} g(x,y)\, dx\, dy = \int_{\sigma} g(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv}$$

jakobian zamiany zmiennych

dla wsp. biegunowych

$$\left|\frac{\partial(\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi)}{\partial(\rho,\varphi)}\right| = \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}\right| = \rho \qquad \square$$

uogólnienie wzoru na zamianę zmiennych pod całką

$$(x,y) \to (u,v)$$

Uogólnienie tego wzoru na całki trójwymiarowe jest proste. Pokazaliśmy w poprzednim rozdziale, że element objętości we wsp. krzywoliniowych jest objętością infinitezymalnego równoległościanu

$$dV = \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial \vec r}{\partial v}\times\frac{\partial \vec r}{\partial w}\right)\right| du\,dv\,dw = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du\,dv\,dz$$

$$\parallel$$

Więc

$$\int_{\mathcal{O}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\mathcal{O}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

Przykład

obliczyć pole elipsy danej równaniem

$$(x-2y+3)^2 + (3x+4y-1)^2 = 100.$$

Jeśli ktoś pamięta, że pole elipsy wynosi πab, gdzie a i b są półosiami elipsy, to może skorzystać z tego wzoru obliczając najpierw długości półosi. Można to zrobić prościej. Pole elipsy jest równe

$$\int_{\mathcal{O}} dx\,dy \;,$$ gdzie $\mathcal{O}$ jest obszarem ograniczonym tą elipsą.

Wprowadzimy nowe współrzędne krzywoliniowe

$$x - 2y + 3 = 10\,r\cos\varphi$$
$$3x + 4y - 1 = 10\,r\sin\varphi$$

Obszar elipsy we wsp. r,φ odpowiada $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$x = -1 + 2r\sin\varphi + 4r\cos\varphi$$
$$y = 1 + r\sin\varphi - 3r\cos\varphi$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 2\sin\varphi + 4\cos\varphi, & \sin\varphi - 3\cos\varphi \\ 2r\cos\varphi - 4r\sin\varphi, & r\cos\varphi + 3r\sin\varphi \end{vmatrix} = 10r$$

Więc

$$P = \int dx\,dy = \int_0^1 10r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 10\pi.$$

Na zakończenie tego rozdziału rozpatrzymy całki niewłaściwe wielokrotne. Postępujemy

Def analogicznie do całki jednokrotnej: wybieramy ciąg obszarów skończonych $O_n \subset O$, który w granicy $n \to \infty$ wypełnia cały obszar O. Następnie obliczamy ciąg całek po obszarach O_n. Jeśli ten ciąg całek ma skończoną granicę przy $n \to \infty$ i granica ta nie zależy od wyboru ciągu O_n, to granicę tę nazywamy wielowymiarową całką niewłaściwą Riemanna.

Przykład

Obliczyć całkę $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

(b. ważna całka).

Funkcja pierwotna nie jest funkcją elementarną, więc b. trudno jest tę całkę obliczyć. Ale można ją łatwo obliczyć za pomocą całki podwójnej.

$$I^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\; e^{-(x^2+y^2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{array} \quad \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| = r \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} r\,dr\; e^{-r^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} r^2 = z \\ 2r\,dr = dz \end{array} \right\} = \pi$$

A więc $\quad I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Może to wydawać się zaskakujące, ale wiele całek jednokrotnych łatwiej jest obliczyć przez całki wielokrotne.

Przykład

Obliczyć całkę $I=\int_0^\infty dx\, \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ $a,b>0$.

Zauważmy, że $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \int_a^b dy\, e^{-yx}$

Więc $I=\int_0^\infty dx \int_a^b dy\, e^{-yx} = \int_a^b dy \int_0^\infty dx\, e^{-yx} =$

$$-\int_a^b dy\, \frac{1}{y}\, e^{-xy}\Big|_0^\infty = \int_a^b dy\, \frac{1}{y} = \ln\frac{b}{a}.$$

Przykład obliczyć

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\, \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{(1+r^2)^2} = 4\pi \int_0^\infty \frac{r^2\, dr}{(1+r^2)^2}$$

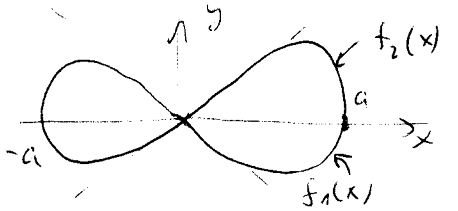
$$= 4\pi\, \frac{1}{2}\left(\text{arctg}\, r - \frac{r}{1+r^2}\right)\Big|_0^\infty = \pi$$

Zastosowania

Najprostszym zastosowaniem jest obliczenie pola figury płaskiej: $P = \int_\Theta dx\,dy$

Przykład Obliczyć pole figury ograniczonej lemniskatą Bernoulliego

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \qquad a>0.$$



równanie to można rozwiązać znajdując funkcyjną zależność y od x na górnej i dolnej części lemniskaty

wtedy $P = \underbrace{2}_{\text{dwa listki}}\int_0^a dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy = 2\int dx\, [f_2(x) - f_1(x)]$

ale to trudna całka!

Łatwiej obliczyć tę całkę przechodząc do współrzędnych biegunowych $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

Równanie lemniskaty ma postać

$$\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi \Rightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

Prawy listek lemniskaty odpowiada $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

Więc
$$P = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{a(\cos 2\varphi)}} \rho\, d\varphi = \underline{a^2}$$

Jak pamiętamy, długość krzywej $y = f(x)$ na płaszczyźnie dana jest całką

$$S = \int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Podobnie możemy wyprowadzić wzór na pole powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni $z = f(x,y)$

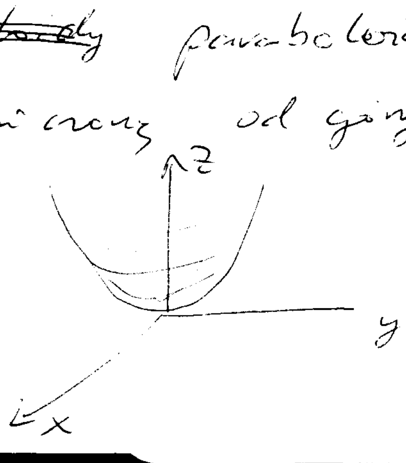
~~Pr~~ W rozdziale 2 podaliśmy już wzór na pole infinitezymalnego elementu powierzchni

$$dP = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

A więc
$$P = \int_\sigma \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\ ,$$
gdzie σ jest rzutem na płaszczyznę Oxy powierzchni $z = f(x,y)$, której pole chcemy obliczyć.

<u>Przykład</u>

Obliczyć powierzchnię ~~trójosiowej~~ paraboloidy obrotowej $z = \frac{1}{a}(x^2+y^2)$ ograniczonej od góry powierzchnią $z = z_0$



Rzutem tej powierzchni na płaszczyznę Oxy jest koło $K(0, \sqrt{az_0})$ o środku w $x=y=0$ i promieniu $\sqrt{az_0}$. Zatem

$$P = \int_{K(0,\sqrt{az_0})} \sqrt{1+\frac{4x^2+4y^2}{a^2}}\,dx\,dy .$$ Przechodząc do

współrzędnych biegunowych

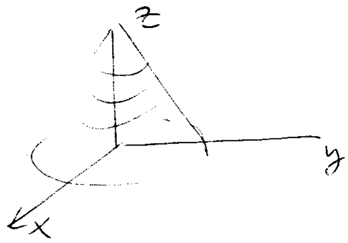
$$\varrho^2=\eta$$

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{az_0}} \varrho\, d\varrho \sqrt{1+4\frac{\varrho^2}{a^2}} = \frac{2\pi}{a}\int_0^{az_0} d\eta \sqrt{\frac{a^2}{4}+\eta} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{6}\left[\left(1+\frac{4z_0}{a}\right)^{3/2}-1\right].$$

<u>Przykład</u> obliczyć objętości stożka o równaniu powierzchni bocznej $z = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}$ znajdującego się nad płaszczyzną Oxy.

wysokości stożka $= h$, promień podstawy r



$$V = \int_{K(0,r)} \left(h-\frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy = \left\{\begin{array}{l} x=\varrho\cos\varphi \\ y=\varrho\sin\varphi \end{array}\right\}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \varrho\, d\varrho\left(h-\frac{h}{r}\varrho\right) = 2\pi h\int_0^r d\varrho\left(\varrho-\frac{\varrho^2}{r}\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h .$$