Równania różniczkowe zwyczajne II-go rzędu

Ogólna postać

(*) $$F(x, y, y', y'') = 0.$$

lub jeśli da się rozwikłać $\quad y'' = f(x, y, y')$.

Tw. Picarda ~~Zagadnienie Cau~~

Ogólny rozwiązaniem jest rodzina krzywych dwuparametrowa $y = y(x, C_1, C_2)$, która spełnia tożsamościowo (*)

Zagadnienie Cauchy'ego, czy też początkowe, polega na wyznaczeniu stałych C_1 i C_2 z warunku

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Można też rozważać warunki brzegowe $\quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$ — nie zawsze da się spełnić, chyba że [illegible] jest jakiś sposób [illegible] (r. Schrödinger, r. [illegible])

Niekiedy r. (*) daje się sprowadzić do równań I-go rzędu.

Typy równań

1) $y'' = f(x)$

wtedy
$$y' = \int f(x)\,dx + C_1 \overset{\text{ozn}}{\equiv} F(x) + C_1$$
$$y = \int F(x)\,dx + C_1 x + C_2$$

możemy wzór napisać
$$\int F(x)\,dx = \int_A^x 1\cdot F(t)\,dt =$$
$$= xF(x) - \underbrace{AF(A)}_{\text{stała}} - \int^x tF'(t)\,dt =$$
$$= x\int^x f(t)\,dt - \int^x t\,f(t)\,dt =$$
$$= \int^x (x-t)\,f(t)\,dt$$
$$y = \int^x (x-t)\,f(t)\,dt + C_1 x + C_2$$

2) $F(x, y'') = 0$

rozwiązujemy parametryzacją, jeśli są dane

$$x = \phi(t) \quad , \quad y'' = \psi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$dy' = \psi(t)\,dx = \psi(t)\,\phi'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow y' = \int \psi(t)\,\phi'(t)\,dt + C_1 \equiv \xi(t, C_1)$$

i znowu $dy = \xi(t, C_1)\,dx = \xi(t, C_1)\,\phi'(t)\,dt$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \int \xi(t, C_1)\,\phi'(t)\,dt + C_2 \\ x = \phi(t) \end{cases}$$

Przykład:

$$x = e^{y''} - y''^2 \qquad y'' = t \quad \psi$$

$$x = e^t - t^2 \quad \phi$$

$$y' = \int t\,(e^t - 2t)\,dt + C_1 = e^t(t-1) - \tfrac{2}{3}t^3 + C_1$$

$$y = \int (e^t - 2t)\left(e^t(t-1) - \tfrac{2}{3}t^3 + C_1\right) dt + C_2$$

3) $F(x, y', y'') = 0$, nie występuje y

podstawiając $y' = p \Rightarrow F(x, p, p') = 0$ r.r. I-go rzędu

Przykład:

$$y' = x y'' + y''^2 \quad , \quad y' = p \quad y'' = p'$$

$$p = x p' + p'^2 = G(x, p')$$

r. typu Clairauta, rozw. parametryczne.

Przykład

$$y'' = \frac{y'+1}{x} \quad , \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{p+1}{x}$$

$$\frac{p'}{p+1} = \frac{dx}{x} \qquad p+1 = Cx \quad , \quad p = y' = C_1 x - 1$$

$$y = \tfrac{1}{2}C_1 x^2 - x + C_2$$

4) $F(y, y', y'') = 0$, brak jawnie x

podstawiamy $z = y'$, i y traktujemy jako nową zmienną niezal.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

wtedy mamy $F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$ r.r. I-go rzędu

po rozwiązaniu $\frac{dy}{dx} = z(y, C_1)$, czyli $x = \int \frac{dy}{z(y,C_1)} + C_2$

Przykład: $2y\,y'' = y'^2 + y^2$. podst $z = y'$

$$2y\, z z' = z^2 + y^2$$

$$y\,(z^2)' = z^2 + y^2 \qquad z^2 = u$$

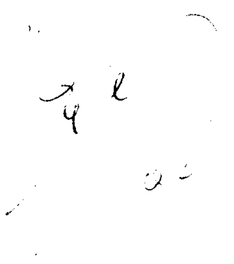
$y u' = u + y^2$ r.r. I-go rzędu liniowe niejedn.

$$u = C_1 y + y^2$$

$$y' = \pm\sqrt{C_1 y + y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y + y^2}} = \pm dx$$

Ruch wahadłowy



$$-ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = mg\sin\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

$$y'' + p(x)\,y' + q(x) = 0 \qquad \text{jednorodne.}$$

zawsze jest rozw. $y \equiv 0$, ale nie ono nas chodzi. banalne.

r. liniowe więc $a y_1 + b y_2$ jest rozwiązaniem

~~jeśli y_1 i y_2 są rozwiązaniami~~

Jeśli y_1 i y_2 są liniowo niezależne (w jakimś sensie)

to dowolne rozwiązanie da się przedstawić jako ich kombinację liniową.

utwórzmy tzw. Wronskian

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$\frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = y_1\left(-p y_2' - qy\right) - \left(-p y_1' - q\right) y_2 =$$

$$= -p\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right) = -p(x)\,W(x)$$

$$W(x) = C e^{-\int p(x)dx}$$

Jeśli więc w jednym punkcie x_0, $W(x_0) \neq 0$, to W nie znika nigdzie, bo funkcja $e^x \neq 0$ dla wszystkich x.

Zadanie:

Jeśli znamy jedno rozwiązanie y_1, to można podać ogólną metodę na znalezienie y_2

weźmy $y = y_1 \cdot z$

podstawiając $\underline{y_1'' z} + 2y_1' z' + y_1 z'' + \underline{p\left(y_1' z + y_1 z'\right)} + \underline{q y_1 z} = 0$

$$y_1 z'' + \left(2y_1' + p y_1\right) z' = 0.$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{z''}{z'} = -\left(2\frac{y_1'}{y} + p\right)$$

$$u = C \exp\left[-\int \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right) dx\right] = \frac{C}{y_1^2} \exp \int \left(-p(x)\right) dx$$

Stąd drugie rozwiązanie mamy z wzoru

$$y_2 = y_1 \cdot z = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2} \exp\Big(-\underbrace{\int p(x)\,dx}_{P(x)}\Big)\,dx$$

Problem: Pokazać, że y_1 i y_2 z poprz. ~~problem~~ zadania tworzą fundamentalny układ rozwiązań (liniowo niezależny).

Obliczyć Wrońskian

Przykład:
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

zauważamy, że szczególne rozwiązanie jest $y_1 = x$.
korzystamy z poprz. rozwiązań

$$P(x) = \int p(x)\,dx = -\int \frac{2x}{1-x^2}\,dx = \ln(1-x^2)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\int \frac{1}{x^2} e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{1}{x}\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}\,dx = \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1$$

Zatem całka ogólna tego równania, to

$$y(x) = C_1 x + C_2\left(\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right)$$

Jeśli dokonamy podstawienia $x = \cos\varphi$ to, to sprowadza się do

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{dy}{d\varphi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\frac{dy}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{d\varphi^2} + n^2 y = 0$$

$$y_1 = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi =$$

$$= A\cos(n\arccos x) + B\sin(n\arccos x)$$

- Równanie liniowe drugiego rzędu normalne jednorodne

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (*)$$

wiąże się z r. Riccati'ego pierwszego rzędu

Zdefiniujmy $z(x) = y'(x)/y(x)$, $\quad y' = zy$

$$y'' = z'y + zy' = z'y + z^2 y$$, więc

$$z' = \frac{dz}{dx} = -z^2 - p(x)z - q(x)$$

Jeśli znamy ~~jedno~~ ogólne rozwiązanie $z(x, C_1)$, to ogólnego rozw. r. II-go rzędu (*) jest rodzina 2-parametrowa

$$y(x, C_1, C_2) = C_2 \exp\left(\int z(x, C_1)\,dx\right)$$

- Fundamentalny układ rozwiązań r. liniowego pozwala znaleźć ogólne r.r. liniowego niejednorodnego

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

~~metoda uzmienniania stałych~~ 1) zgadujemy jedno rozw. r. niej.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_0(x)$$

↑ dowolne rozw. r. niejednorodnego

2) metoda uzmienniania stałych

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) \qquad (a)$$

mamy bowiem

$$y'(x) = C_1 y_1' + C_1' y + C_2 y_2' + C_2' y_2$$

Ponieważ chodzi o dowolne rozw. r. niejednorodnego, to możemy zażądać dodatkowo, aby $C_1' y_1 + C_2' y_2 \equiv 0$ (b)

Wtedy

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' \qquad (c)$$

(a),(b),(c) wstawiamy do r. niejednorodnego

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + p(x)\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) +$$
$$+ q(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = f(x)$$

$\Longrightarrow$

więc mamy

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$$

skąd
$$c_1' = -\frac{f(x)\, y_2(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} = -\frac{f(x)\, y_2}{W(y_1, y_2)}$$
$$c_2' = +\frac{f(x)\, y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

$$c_1(x) = \int -\frac{f\, y_2}{W}\, dx + D_1$$
$$c_2(x) = \int \frac{f\, y_1}{W}\, dx + D_2$$

$y_1 c_1(x) + y_2 c_2(x)$ = rozw. szczególn. r. niejednor.

Przykład: $y'' - y' - 2y = e^{2x} + e^{-x}$

r. jedn. $y = e^{\lambda x}$ $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$

$y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$

rozw. ogólne r. jednor. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{2x}(-e^{-x}) - 2e^{2x} e^{-x} = -3e^{x}$$

$$c_1 = \int (-) \left(\frac{e^{2x} + e^{-x}}{-3e^{x}}\right) e^{-x} dx = \frac{1}{3}\int (e^{x} + 1) e^{-x} dx = \frac{1}{3}\int (1 + e^{-x})\, dx = \frac{1}{3}(x - e^{-x}) + D_1$$

$$c_2 = \int \frac{e^{2x} + e^{-x}}{-3e^{x}}\, e^{2x} dx = -\frac{1}{3}\int (e^{3x} + 1)\, dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} e^{3x} + x\right) + D_2$$

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = \frac{1}{3}(x - e^{-x}) e^{2x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} e^{3x} + x\right) e^{-x} + D_1 e^{2x} + D_2 e^{-x}$$
$$= \frac{1}{3} x e^{2x} - \frac{1}{3} e^{x} - \frac{1}{9} e^{2x} - \frac{1}{3} x e^{-x} + D_1 e^{2x} + D_2 e^{-x}$$
$$= \frac{1}{3} x (e^{2x} - e^{-x}) + \tilde{D}_1 e^{2x} + \tilde{D}_2 e^{-x}.$$

Równanie II-rzędu jednorodne specjalne

A) równanie o stałych współczynnikach

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Rozwiązania szukamy w postaci $e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1$ i λ_2

jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

jeśli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, to $y = C_1 e^{\lambda x} + x C_2 e^{\lambda x}$?

to z pomocą pomocnej metody

λ_1 i λ_2 mogą być zespolone, gdy $a, b \in \mathbb{R}$, $\Delta < 0$.

wtedy $\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$

$y_1 = C_1 e^{\lambda_0 x} \sin \omega x + C_2 e^{\lambda_0 x} (\cos \omega x)$

B) równanie typu Eulera

$$x^2 y'' + axy' + by = 0.$$

(jednorodne ze względu na x.)

Rozwiązania szukamy w postaci $y = x^\lambda$

$\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0$

$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$

jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$

jeśli $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 x^\lambda + C_2 x^\lambda \ln x.$

Zauważmy, że przez podstawienie $x = e^t$ r. Eulera sprowadza się do r. o stałych współczynnikach.

Przykład rozwiązać niejednorodne o stałych współcz. $\boxed{1-29}$

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$$

r. jednorodne $y'' - y' = 0$ $\quad y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$

$\lambda = 0,\ \lambda = 1$

ORRJ $\quad y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{1x} = C_1 + C_2 e^x$

uzmienniamy stałe

układ równań $\quad C_1' + C_2' e^x = 0$

$$C_2' e^x = e^x + e^{2x} + x$$

$$C_2' = 1 + e^x + xe^{-x} \Rightarrow C_2 = D_2 + x + e^x - xe^{-x} - e^{-x}$$

$$C_1' = -e^x - e^{2x} - x$$

$$\Rightarrow C_1 = D_1 - e^x - \tfrac{1}{2} e^{2x} - \tfrac{1}{2} x^2$$

ORRN
$$y = D_1 - e^x - \tfrac{1}{2} e^{2x} - \tfrac{1}{2} x^2 + D_2 e^x + xe^x + e^{2x} - x - 1$$
$$= \tilde{D}_1 + D_2 e^x + \tfrac{1}{2} e^{2x} + xe^x - \tfrac{1}{2} x^2 - x$$

Przykład: niejednorodne r. Eulera

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 2$$

najpierw ORRJ szukamy w postaci x^λ

$$\lambda(\lambda - 1) x^{\lambda-2} - 2\lambda x^{\lambda-2} + 2 x^{\lambda-2} = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \Rightarrow$$

ORRJ $= C_1 x^1 + C_2 x^2$

teraz niejednorodne

$$C_1' x + C_2' x^2 = 0$$
$$C_1' + 2C_2' x = 2 \quad | \cdot x$$

$$C_2' x^2 = 2x \Rightarrow C_2' = \frac{2}{x} \Rightarrow C_2 = 2\ln|x| + D_2$$

$$C_1' x + \frac{1}{x} x^2 = 0 \Rightarrow C_1' = -1, \quad C_1 = x + D_1$$

ORRN: $\quad y = D_1 x + D_2 x^2 + 2 x^2 \ln|x| = D_1 x + D_2 x^2 + 2x^2 \ln|x|$

przykład: oscylator tłumiony z siłą wymuszającą

$$m\ddot{x} = -T\dot{x} - kx - F(t)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = V(t)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

$$h = \frac{T}{2m} \quad \text{lub} \quad \frac{R}{2L}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{LC}$$

$$f(t) = \frac{F}{m} \quad \text{lub} \quad \frac{V}{L}$$

war. pocz.

$x(t_0) = x_0$

$\dot{x}(t_0) = v_0$

ORRJ $\quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad x = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$$

1) Jeśli brak tłumienia, tzn $h = 0$, $\Rightarrow$ $\lambda_1 = -h \pm i\omega$,

i rozwiązania

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t =$$

$$= D\cos(\omega t + \varphi)$$ drgania harmoniczne okresowe

2) tłumione, ale $h < \omega$, $\quad \omega^2 > h^2$

zanikające drgania okresowe.

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega^2 - h^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{-ht + i\sqrt{\omega^2-h^2}t} + A_2 e^{-ht} e^{-i\sqrt{\omega^2-h^2}\,t}$$ czas życia $T = \frac{1}{h}$

$$= C_1 e^{-ht} \sin\sqrt{\omega^2-h^2}\,t + C_2 e^{-ht} \cos\sqrt{\omega^2-h^2}\,t$$

3) tłumione, ale $h = \omega$

$$\lambda_{1,2} = -h$$

zanikające

$$x(t) = Ae^{-ht} + Bte^{-ht}$$

4) tłumione, ale $h > \omega$

wolny czas zanikające

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{(-h + \sqrt{h^2-\omega^2})t} + A_2 e^{(-h - \sqrt{h^2-\omega^2})t}$$

teraz v międzmodnie, Ω z siłą wymuszającą

$$f(t) = f_0 \sin \Omega t$$

a) $h=0$ bez tłumienia

inwariant state $\qquad C_1(t)\sin\omega t + C_2(t)\cos\omega t$

$\Rightarrow$ układ $\qquad C_1'\sin\omega t + C_2'\cos\omega t = 0 \qquad \Big| \cos\omega t$

$$+\omega C_1'\cos\omega t - \omega C_2'\sin\omega t = f(t) \qquad \Big| \frac{\sin\omega t}{\omega}$$

$$C_2' = \frac{1}{\omega} f(t) \sin\omega t \Rightarrow \qquad C_2 = D_2 - \int^t \frac{1}{\omega} f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau$$

$$C_1' = +\frac{1}{\omega} f(t) \Rightarrow \qquad C_1 = D_1 + \int^t \frac{1}{\omega} f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$

ORRN: $x(t) = D_1 \sin\omega t + D_2\cos\omega t + \frac{1}{\omega} f_0 \int \sin\omega t$

$$+ \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin[\omega(t-\tau)]\,d\tau$$

Jeśli $\quad f(\tau) = f_0 \sin\Omega t$; war. pocz. $\qquad x(t=0) = x_0$

$$\dot x(t=0) = \dot x_0$$

$$\int_0^t \sin\Omega\tau \sin[\omega(t-\tau)] = \frac{1}{2}\int_0^t \cos[(\Omega-\omega)t + \omega\tau] - \int_0^t \cos[(\Omega+\omega)t - \omega\tau]\, d\tau$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin}{\Omega-\omega} = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\cos[(\Omega+\omega)\tau - \omega t] - \cos[(\Omega-\omega)\tau + \omega t]\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((\Omega+\omega)\tau - \omega t)}{\Omega+\omega} - \frac{\sin[(\Omega-\omega)\tau + \omega t]}{\Omega-\omega}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(\Omega+\omega)t - \omega t] + \sin\omega t}{\Omega+\omega} - \frac{\sin[(\Omega-\omega)t + \omega t] - \sin\omega t}{\Omega-\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\Omega t}{\Omega+\omega} - \frac{\sin\Omega t}{\Omega-\omega}\right) = \underline{\qquad}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\Omega t + \sin\omega t}{\Omega+\omega} - \frac{\sin\Omega t - \sin\omega t}{\Omega-\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\Omega-\omega)(\sin\Omega t + \sin\omega t) - (\Omega+\omega)(\sin\Omega t - \sin\omega t)}{\Omega^2-\omega^2} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin\Omega t\,(\Omega-\omega-\Omega+\omega)+\sin\omega t\,(\Omega-\omega+\Omega+\omega)}{\Omega^2-\omega^2}=$$

$$=\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}\left(-\omega\sin\Omega t+\Omega\sin\omega t\right)$$

drgania z siłą, częstością zewnętrzną

więc przy zadanych war. pocz. [illegible]

$$x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t+f_0\,\frac{\Omega\sin\omega t-\omega\sin\Omega t}{\omega(\Omega^2-\omega^2)}$$

Jeśli $\Omega\to\omega$, tzn częstość siły wymuszającej = własnej, to przechodzimy do granicy

$$x(t)=\left(x_0-\frac{f_0t}{2\omega}\right)\cos\omega t+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}+\frac{f}{2\omega^2}\right)\sin\omega t$$

dla dużych t $\quad x\to-\frac{f_0t}{2\omega}\cos\omega t$

ruch okresowy z rosnącą liniowo amplitudą

Jeśli jest z tłumieniem $h\neq 0$

Gdy częstość $\Omega\neq\omega$, to mamy do mamy do czynienia z dudnieniami.

teraz, gdy jest tłumienie. $\quad h\neq 0 \qquad 0<h<\omega$

zgadujemy rozw. r. niejednorodnego — postaci

$$x_n(t)=a\sin\Omega t+b\cos\Omega t \quad \Big|\ \text{dla siły } f(t)=f_0\sin\Omega t$$

po wstawieniu i wyznaczeniu współczynników dostajemy

$$a=\frac{\omega^2-\Omega^2}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4h^2\Omega^2}\,f_0\,,\qquad b=-\frac{2h\Omega}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4h^2\Omega^2}\,f_0$$

bo dla $t\to\infty$ drgania własne zanikają wykładniczo i zostają jedynie drgania wymuszone.

co wynika z interpretacji fizycznej

Równania różniczkowe zwyczajne wyższych rzędów (1-33)

Sytuacja jest dużo bardziej skomplikowana niż równania 1-go rzędu. Przy r. 2-go rzędu rozpatrzyliśmy 6 klas równań, które rozwiązywało się sprowadzając je najpierw do równania 1-go rzędu.

Np. klasa 1° $y'' = f(x)$

$$y = C_1 x + C_2 + \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)\,dt$$

x_0 dowolne

Teraz jeśli $y^{(n)} = f(x)$

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots C_{n-1} x + C_n + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

co można sprawdzić bezpośrednio podstawiając y do r. różniczkowego.

Podobnie można uogólnić metody 2-6.

klasa 6° $F(x, y, y', y'') = \frac{d\Phi(x,y,y')}{dt} \Rightarrow \Phi(x,y,y') = C_1$ i tak dalej

jeśli więc $y^{(n)} = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \phi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) = C_1$ itd.

W ogólnym przypadku sytuacja jest bardzo trudna i trzeba uciec się do metod numerycznych.

Stosunkowo prosty jest problem znalezienia rozwiązań równania liniowego

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x)$$

Najpierw rozpatrujemy równanie jednorodne

liniowość $\equiv$ kombinacja liniowa rozwiązań jest też rozwiązaniem

ORRJ można zapisać jako kombinację liniową n liniowo niezależnych rozwiązań szczególnych, dla których

$$b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x) = 0 \iff b_1 = b_2 = \dots = b_n$$

Warunek ten jest równoważny żądaniu aby Wrońskian

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

dla jakiegoś x (bo wtedy we wsz…

wówczas

ORRJ: $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$

$C_1 \dots C_n$ – stałe całkowania

ORRN szukamy uzmienniając stałe przy dodatkowych warunkach

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

który na mocy $W(x) \neq 0$ ma jednoznaczne rozwiązanie

dla $C_i'(x) = G_i(x) \qquad i = 1, \dots, n$

wtedy $C_i(x) = \int G_i(x)\,dx + D_i$

ORRN: $y = D_1 y_1 + \dots \; D_n y_n \quad \leftarrow$ ORRJ

$+ \; y_1 \int G_1(x) + \dots \; y_n(x) \int G_n(x)\,dx \quad \leftarrow$ SRRN

W ogólności trudno też jest podać fundamentalny układ rozwiązań ~~liniowo jednorodnego~~ dającego ORRJ.

W szczególnych przypadkach daje się to dość łatwo zrobić.

1) równanie o stałych współczynnikach, gdzie $a_i(x) \equiv a_i$
i wtedy szukamy rozw. w postaci $y = e^{\lambda x}$
dostajemy wtedy równanie algebraiczne na λ

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

które ma n rozwiązań (w ogóle zespolonych)

2) równanie typu Eulera (jednorodne

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

wtedy szukamy w postaci $y = x^\lambda$ dostajemy

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Jeśli ~~rozw.~~ pierwiastkami są liczby λ_j o krotności $k_j \leq n$, $j = 1, \ldots, i \leq n$
to fundamentalny układ rozwiązań tworzą funkcje.

w przyp 1)
$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \ldots & x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x}, \ldots & x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots & \\ e^{\lambda_i x}, \ldots & x^{k_i-1} e^{\lambda_i x} \end{cases}$$

w przyp 2
$$\begin{cases} x^{\lambda_1}, x^{\lambda_1}\ln x, \ldots, x^{\lambda_1}(\ln x)^{k_1-1} \\ \vdots \\ x^{\lambda_i}, x^{\lambda_i}\ln x, \ldots, x^{\lambda_i}(\ln x)^{k_i-1} \end{cases}$$

2. Zauważmy też, że przez podstawienie $x = e^z$
równania typu Eulera sprowadzają się do równań
o stałych współczynnikach

bo:
$$\frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{d}{dz} = \frac{1}{\frac{dx}{dz}}\frac{d}{dz} = \frac{1}{e^z}\frac{d}{dz}$$

$$x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dz}.$$

Przydatne są metody zgadywania rozwiązań szczególnych równań niejednorodnych. Można tutaj podać kilka wskazówek pomocnych w zgadywaniu, jeśli $f(x)$

1) $f(x) = c e^{\alpha x}$, gdzie $\alpha \neq \lambda_i$ - wart. własne
wtedy szukamy SRRN w postaci $y(x) = b e^{\alpha x}$ i po wstawieniu do RRN wyznaczamy b.

2) $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m$, to rozw. szukamy w postaci $y(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ i wyznaczamy b

3) Jeśli $f(x) = c x^m e^{\lambda_j x}$, gdzie λ_j jest k_j-krotnym ~~pierwiastkiem~~ z rozwiązań przy szukaniu ORRJ, to szukamy SRRN w postaci
$$y = \left(b_1 x^{k_j} + b_2 x^{k_j+1} + \ldots + b_m x^{k_j+m}\right) e^{\lambda_j x}$$

4) Jeśli $f(x)$ = suma lub iloczyn funkcji z punktów 1-3, to rozwiązania szukamy w postaci sumy lub iloczynu odpowiednich funkcji.

Przykład
$$y''' - 3y' + 2y = e^{-x}$$
ORRJ $\quad y = e^{\lambda x} \qquad \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

ORRJ $\Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}$

SRRN $\Rightarrow f(x)$ różni się od $y \Rightarrow y_{szcz} = c e^{-x}$

wstawiamy SRRN do r.r.
$$-c + 3c + 2c = 1 \Rightarrow c = +\frac{1}{4}$$
$$\text{ORRN} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-x}$$

Przykład

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2$$

ORRJ $\quad y = e^{\lambda x} \Rightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0.$

SRRN $\quad y = b_1 x^2 + b_2 x + b_3, \quad y' = 2b_1 x + b_2, \quad y'' = 2b_1$

$$\Rightarrow \quad -6b_1 + 6b_1 x + 3b_2 - b_1 x^2 - b_2 x - b_3 = x^2$$

$$\Rightarrow b_1 = -1, \quad b_2 = -6, \quad b_3 = -12$$

$y = -x^2 - 6x$

$y' = -2x - 6, \quad y'' = -2, \quad y''' = 0$

ORRN: $\quad y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x - x^2 - 6x - 12$

Przykład

$$y'''' + 2y'' + y = 2\cos x$$

ORRJ $\Rightarrow \quad \lambda^4 + 2\lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2 (\lambda - i)^2 = 0$

$\lambda = \pm i$, każdy dwukrotny

ORRJ: $\quad y = C_1 e^{ix} + C_2 x e^{+ix} + C_3 e^{-ix} + C_4 x e^{-ix}$

ponieważ $\quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

to SRRN szukamy w postaci:

$$\cancel{y(x) = (b_1 e^{ix} + b_2 x e^{ix} + b_3 e^{-ix} + b_4 x e^{-ix})} -$$

$$y_N(x) = b_1 x^2 e^{ix} + b_2 x^2 e^{-ix}$$

(punkty 3 i 4 z poprz. strony).

Po ustawieniu do r.r. dostajemy $\quad b_1 = b_2 = -\frac{1}{8}$

czyli ORRN jest funkcja

$$y(x) = C_1 e^{ix} + C_2 x e^{ix} + C_3 e^{-ix} + C_4 x e^{-ix} - \frac{1}{4} x^2 \cos x.$$

Układy równań różniczkowych.

Równanie różniczkowe zwyczajne n-tego rzędu, które można rozwiązać daje się zapisać jako układ n równań pierwszego rzędu. Np równanie drugiego rzędu $y'' = f(x, y, y')$ podstawiamy $y' = z$ i mamy układ

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

Zajmiemy się układem n równań.

$$\begin{cases} y_1' = F_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = F_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Nie istnieją ogólne metody rozwiązywania tego typu równań.

Zajmiemy się układem równań liniowych, gdzie

$$F_1(x, y_1, \dots, y_n) = L_{11}(x)\, y_1 + L_{12}(x)\, y_2 + \dots + L_{1n}(x)\, y_n + f_1$$

Możemy to zapisać w postaci macierzowej

$$\frac{dy}{dx} = L(x)\, y(x) + f(x) \qquad y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Wygląda jak r. różniczkowe 1-szego rzędu, ale macierze

$$\text{np} \quad L(x_1)\, L'(x_2) \neq L(x_2)\, L(x_1) \qquad x_1 \neq x_2$$

Najpierw ORR J

$$\frac{dy}{dx} = L\, y$$

rozwiązanie

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kolumna} \\ \text{funkcji}}}{y(x)} = \underbrace{\exp\Big(\int_{x_0}^{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{macierz} \\ \text{funkcji}}}{L(t)}\, dt \Big)}_{\text{macierz}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kolumna wart. pocz.}}}{y^0}, \qquad y(x_0) = y^0$$

poszczególne rozwiązania

$$y_i = \sum_j \left(\exp \int_{x_0}^{x} L(t)\,dt \right)_{ij} y_j^0$$

pamiętamy, że $\left(e^{A}\right)_{ij} \neq e^{A_{ij}}$

Najprostszym przykładem jest układ o stałych współczynnikach, gdzie $L(x) = L$ - macierz liczbowa.

Wtedy $\exp \int_{x_0}^{x} L\,dx = \exp\left((x-x_0)L\right)$

Aby znaleźć jawną postać tej funkcji wygodnie jest przejść do bazy, w której macierz liczbowa L jest diagonalna (jeśli da się zdiagonalizować).

tzn $L_D = S^{-1} L S$ $\qquad L = S L_D S^{-1}$

Wówczas

$$\exp(x-x_0)L = \exp\left((x_0-x_0) S L_D S^{-1}\right) = S\, e^{(x-x_0)L_D} S^{-1}$$

$$e^{(x-x_0)L_D} = \begin{pmatrix} e^{(x-x_0)\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(x-x_0)\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Przykład

$$\frac{dy}{dx} = Ly, \quad \text{gdzie} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -iB & -b \\ b & iB \end{pmatrix}$$

$b, B \in \mathbb{R}$

$$\det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} -iB-\lambda & -b \\ b & +iB-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + B^2 + b^2 = 0$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{B^2+b^2}$$

wektory wł-sne $\lambda = i\sqrt{B^2+b^2}$

$$(L - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -iB - i\sqrt{B^2+b^2} & -b \\ b & iB - i\sqrt{B^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

$$(iB + i\sqrt{B^2+b^2})u = bw$$

$u = -ib$

$w = B + \sqrt{B^2+b^2}$

$$v_1 = \frac{1}{N} \cancel{\;\;} \begin{pmatrix} -ib \\ B + \sqrt{B^2+b^2} \end{pmatrix}, \quad N^2 = \left(b^2 + B^2 + 2\sqrt{B^2+b^2} + b^2 + B^2\right)$$

$$N = \sqrt{2}\left(B^2 + b^2 + \sqrt{B^2+b^2}\right)$$

wartości własnej $\lambda_2 = -i\sqrt{B^2+b^2}$ odpowiada $v_2 = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} B+\sqrt{B^2+b^2} \\ ib \end{pmatrix}$ 1-40

Macierz diagonalizująca

$$S = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -ib & B+\sqrt{B^2+b^2} \\ B+\sqrt{B^2+b^2} & ib \end{pmatrix}, \quad \text{unitarna} \quad S^{-1} = S^{\dagger}$$

Zatem rozwiązanie układu równań jest

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{B^2+b^2}(x-x_0)} & \\ & e^{-i\sqrt{B^2+b^2}(x-x_0)} \end{pmatrix} S^{\dagger} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

war. pocz. dla $x = x_0$

W dalszej części studiów przekonają się państwo, że biorąc $x = t$ przykład ten opisuje ewolucję w czasie spinu $\frac{1}{2}$ cząstki (np. elektronu) w stałym polu magnetycznym.

Rozwiązanie w postaci ogólnej

$$y(x) = e^{(x-x_0)L}\, y^0 = S\, e^{(x-x_0)L_D}\, S^{-1} y^0 =$$

$$= S\, e^{(x-x_1)L_D + (x_1-x_0)L_D}\, S^{-1} y^0 =$$

$$= S\, e^{(x-x_1)L_D}\, e^{(x_1-x_0)L_D}\, S^{-1} y^0 =$$

bo przemienne

$$= S\, e^{(x-x_1)L_D}\, S^{-1} S\, e^{(x_1-x_0)L_D}\, S^{-1} y^0 =$$

$$= e^{(x-x_1)L}\, y^1$$

w ogólnym przypadku

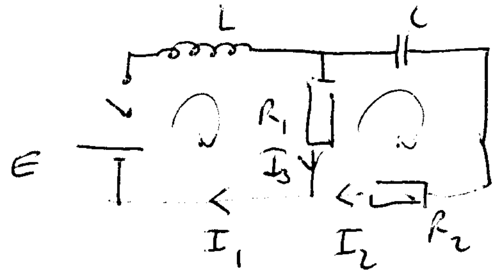
$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} L\,dx}\, y^0 =$$

$$= K(x, x_0)\, y^0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dK}{dx} y^0 = L K y^0 \Rightarrow \frac{dK(x,x_0)}{dx} = L(x) K(x,x_0)$$

$K(x, x_0)$ opisuje zmiany (ewolucję; jeśli t – czas) od x_0 do x. Stąd nazwa propagator.

Przykład obwody elektryczne



$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad \text{prawo Kirchhoffa}$$

$$L \dot{I}_1 + R_1 I_3 = E$$

$$-R_1 I_3 + \frac{1}{C}\int I_2\, dt + R_2 I_2 = 0$$

różniczkując $\quad -R_1 \dot{I}_3 + \frac{1}{C} I_2 + R_2 \dot{I}_2 = 0$

$$L \dot{I}_1 + (I_1 - I_2) R_1 = E \qquad\qquad L \dot{I}_1 + (I_1 - I_2) R_1 = E$$

$$-R_1 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \frac{1}{C} I_2 + R_2 \dot{I}_2 = 0. \qquad -R \dot{I}_1 + (R_1 + R_2) \dot{I}_2 + \frac{1}{C} I_2 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ -R_1 & R_1 + R_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & -R_1 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$$

mnożymy przez macierz odwrotną

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -R_1/L & R_1/L \\ \frac{R_1^2}{L(R_1+R_2)} & \frac{C R_1^2 - L}{CL(R_1+R_2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/L \\ \frac{R E_1}{L(R_1+R_2)} \end{pmatrix}$$

i dalej rozwiązujemy tradycyjnie