Rozdział 1
Równania różniczkowe zwyczajne

1.1. Pojęcia podstawowe

Równania różniczkowe (r.r.) ważne w fizyce, gdyż zwykle taką postać mają podstawowe prawa przyrody. Np. prawo Newtona dla ruchu cząstki o masie m wzdłuż osi x w polu siły $F(x,t)$ ma postać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,t)$$

a rozkład ładunku $\rho(x,y,z)$ generuje pole elektryczne w przestrzeni, którego potencjał $\phi(x,y,z)$ dany jest równaniem Poissona

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y,z)$$

Pierwsze równanie jest r.r. zwyczajnym, drugie r.r. cząstkowym. Na ogół rozwiązanie r.r. cząstkowego jest bardzo trudne i wyznacza się je numerycznie. Jedną z metod analitycznych, które czasami dają się zastosować, jest tzw. metoda rozdzielania zmiennych, sprowadzająca r.r. cząstkowe do układu r.r. zwyczajnych.

W tym rozdziale ograniczymy się więc do omówienia metod rozwiązywania r.r. zwyczajnych.

Def. Równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu funkcji $y(x)$ nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

gdzie F jest znaną funkcją, a $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$.
Rozwiązaniem tego równania jest taka funkcja $y(x)$, która ma pochodne do n-tego rzędu i po podstawieniu jej wraz z jej pochodnymi do powyższego równania spełnia je tożsamościowo dla wszystkich $x \in (a, b)$. Jest to rozwiązanie na odcinku (a, b).

Przykład: Równanie oscylatora harmonicznego

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

jest równaniem drugiego rzędu na funkcję $x(t)$.
Rozwiązaniem jest funkcja

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie stałe A, B (lub stałe C i φ) są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Ogólne rozwiązanie równania drugiego rzędu jest więc dwuparametrową rodziną rozwiązań. W ogólności rozwiązaniem r.r. n-tego rzędu jest n-parametrowa rodzina funkcji zależna od n dowolnych stałych.
Stałe te mogą być wyznaczone, jeśli mamy dodatkowe warunki narzucone na rozwiązanie.
Np. dla oscylatora mogą to być tzw. warunki początkowe (tzw. zagadnienie Cauchy'ego) mówiące, że w pewnej chwili czasu t_0 wychylenie i prędkość są znane

$$x(t_0) = x_0, \qquad v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$$

W szczególności, jeśli $t_0 = 0$, to

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Ogólnie, zagadnienie Cauchy'ego dla równania n-tego rzędu wymaga podania wartości ~~[illegible]~~ funkcji wraz z jej pochodnymi aż do pochodnej $(n-1)$-rzędu w pewnym punkcie x_0.

Przykład: Niektóre r.r. mogą posiadać rozwiązania, które nie są szczególnymi przypadkami rozwiązań ogólnych. Np. równanie

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

ma ogólne rozwiązanie postaci

$$y(x) = (x-c)^2 \qquad \text{dla } x \geq c$$

zależne od jednej stałej dowolnej c (bo jest to równanie 1-szego rzędu). Zauważmy, że dla $x < c$ równanie to nie ma rozwiązania. Równanie to ma jeszcze jedno rozwiązanie

$$y(x) = 0,$$

które nie mieści się w rodzinie funkcji $y(x) = (x-c)^2$. Rozwiązanie to nazywamy osobliwym.

Powstaje pytanie: kiedy zagadnienie Cauchy'ego ma jednoznaczne rozwiązanie, a kiedy pojawiają się rozwiązania osobliwe?

Odpowiedź na to pytanie daje.

Twierdzenie Picarda

Niech $y(x)$ spełnia r.r.

$$F(x, y, y') = 0$$

z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$.

Jeśli są spełnione warunki:

1) równanie $F=0$ możemy rozwikłać do $y' = f(x,y)$
2) funkcja $f(x,y)$ jest ciągła (a więc i ograniczona) w pewnym otoczeniu $\mathcal{D}$ punktu (x_0, y_0)
3) funkcja $f(x,y)$ ma ograniczoną pochodną w $\mathcal{D}$

$$\left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq L$$

to w $\mathcal{D}$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie r.r. spełniające dany warunek początkowy.

Uwaga: zauważmy, że $F(x,y,y') = F(x,y,\frac{dy}{dx})$ można też potraktować jako r.r. na funkcję $x(y)$. Wówczas role zmiennych x i y w powyższym ~~[illegible]~~ twierdzeniu zamieniają się.

Uwaga: Warunek 3) w pw. twierdzeniu można osłabić do postaci warunku Lipschitza

3') $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ dla $(x,y_1),(x,y_2) \in \mathcal{D}$

nie wymaga on różniczkowalności $f(x,y)$ po y.

Wracając do poprzedniego przykładu, gdzie

$$f(x,y) = 2\sqrt{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ nie jest}$$

ograniczona dla $y=0$. Stąd w punktach $(x, 0)$ nie ma jednoznacznego rozwiązania. Może być rozwiązanie osobliwe (nazwa stąd, że występujące $\frac{\partial f}{\partial y}$ jest osobliwe)

Oprócz zagadnienia Cauchy'ego mogą być innego typu warunki narzucone na rozwiązanie. Np. dla równania drugiego rzędu

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

można zażądać, aby $y(x=0) = y(x=L) = 0$.

Odpowiada to szukaniu rozwiązania dla struny $y(x)$ spełniającej powyższe równanie, ale zamocowanej w $x=0$ i $x=L$. Wtedy korzystając z ogólnego rozwiązania $y(x) = A\sin kx + B\cos kx$ mamy

$$\begin{cases} B = 0, \\ A\sin kL + B\cos kL = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow k = \frac{\pi n}{L}$$

a więc istnieją rozwiązania, jeśli parametr k występujący w równaniu spełnia warunki zgodne z warunkami brzegowymi. Możliwe są więc drgania struny tylko o ściśle określonych częstościach (długościach fal).

1.2. Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

$$F(x, y, y') = 0$$

Ogólnym rozwiązaniem jest jednoparametrowa rodzina $y = g(x, C)$, która po wstawieniu do równania spełnia je tożsamościowo dla wszystkich dopuszczalnych wartości x i wszystkich możliwych wartości parametru C zwanego stałą całkowania.

Rozpatrzmy przypadki szczególne.
Często równanie $F(x, y, y') = 0$ można rozwikłać względem pochodnej do $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ lub do

$$\frac{dx}{dy} = g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

Równanie te można też zapisać w ogólniejszej postaci

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0, \qquad \text{gdzie} \quad f(x,y) = -\frac{X(x,y)}{Y(x,y)}$$

<u>Metody rozwiązywania</u> r.r. zwyczajnych 1-szego rzędu

1) niech $\frac{dy}{dx} = f(x)$

wtedy $y(x) = \int f(x)\,dx + C = \int_a^x f(z)\,dz$,

gdzie C (lub a) stała dowolna. W przypadku zagadnienia Cauchy'ego $y(x_0) = y_0$, rozwiązaniem jest

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz + y_0$$

<u>Przykład</u> $y' = \frac{1}{1+x^2}$ z war. początkowym $y(0)=0$

ogólne rozwiązanie jest $y(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Rozwiązanie war. początkowego daje $C=0$

2) jeśli $\frac{dy}{dx} = f(y)$ to szukamy rozwiązania równania $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ na funkcję $x(y)$.

Wtedy $x(y) = \int \frac{1}{f(y)}\,dy + C$

<u>Przykład.</u> $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$

$$x(y) = \int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int dy\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right| + C$$

Po odwikłaniu $y(x) = \begin{cases} \operatorname{th}(x-C) & \text{dla } |y|<1 \\ \operatorname{cth}(x-C) & \text{dla } |y|>1 \end{cases}$

Równanie ma też dwa rozwiązania osobliwe $y = \pm 1$

(bo $\frac{1}{1-y^2}$ jest osobliwe dla $y = \pm 1$, a więc nie spełnia war. 2) tw Picarda)

Przykład. równanie $\frac{dy}{dx} = f(ay + bx)$, $a, b \neq 0$
podstawieniem $z = ay + bx$ sprowadza się do
$$\frac{dz}{dx} = af(z) + b$$ i stosujemy metodę 1).

Powyższe przykłady były uproszczoną wersją nast. przypadku

3) Równanie o rozdzielonych zmiennych
$$X(x)\,dx + Y(y)\,dy = 0.$$
którego ogólne rozwiązanie w postaci uwikłanej ma postać
$$\int X(x)\,dx + \int Y(y)\,dy = C,$$
i C jest stałą całkowania

Przykład
$$x\,dx + (y+1)\,dy = 0$$
$$\int x\,dx + \int (y+1)\,dy = 0$$
$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y+1)^2 = C.$$
Rozwiązanie jest równaniem okręgu o środku w $(0,-1)$ i promieniu $\sqrt{2C}$.
Stała całkowania nie może być ujemna.

4) Równanie jednorodne są postaci
$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0$$
jeśli funkcje X i Y spełniają warunek skalowania
$$X(tx, ty) = t^m X(x,y), \quad Y(tx,ty) = t^m Y(x,y)$$
Rozwiązanie szukamy w postaci
$$y = x\,z(x)$$
ponieważ $dy = x\,dz + z\,dx$, to po wstawieniu

mamy
$$X(x, xz)\,dx + Y(x, xz)(x\,dz + z\,dx) = 0.$$

Ale z warunku skalowania dostajemy
$$X(x, xz) = x^m X(1,z), \qquad Y(x, xz) = x^m Y(1,z) \Rightarrow$$

$$\big(X(1,z) + zY(1,z)\big)\,dx + xY(1,z)\,dz = 0$$

Rozdzielamy zmienne
$$\frac{dx}{x} + \frac{Y(1,z)}{X(1,z) + zY(1,z)}\,dz = 0.$$

Rozwiązanie w postaci uwikłanej
$$\ln|x| = \int \frac{Y(1,z)}{X(1,z) + zY(1,z)}\,dz = C$$

Szczególnym przypadkiem równania jednorodnego jest
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right), \quad \text{gdzie}$$

a) jeśli $a\beta - b\alpha = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$, to istnieje d, takie że $\alpha x + \beta y = d(ax+by)$ więc
$$f\left(\frac{ax+by+c}{d(ax+by)+\gamma}\right) \equiv g(ax+by)$$
a to już rozpatrywaliśmy

b) jeśli $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$, to istnieje rozwiązanie układu równań
$$\begin{cases} ap + bq + c = 0 \\ \alpha p + \beta q + \gamma = 0 \end{cases}$$
Zamieniamy zmienne $x = \tilde{x} + p$, $y = \tilde{y} + q$

i dostajemy
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a\tilde{x} + b\tilde{y}}{\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{\alpha + \beta\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right) \equiv g\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)$$

To jest już równanie jednorodne, którego rozwiązań szukamy w postaci $\tilde{y}(\tilde{x}) = \tilde{x}\,z(\tilde{x})$.

Na równanie jednorodne można spojrzeć inaczej. Przypiszemy wielkościom x i dx wagę 1, a y i dy wagę m. Następnie sprawdzamy, czy istnieje takie m, że wszystkie wyrazy w równaniu mają takie same wagi. Jeśli tak, to szukamy rozw. w postaci $y = x^m z(x)$

Przykład

$$2\frac{dx}{x^2} - y^2 dx + dy = 0$$

wagi: $\quad -1 \quad -2m+1 \quad m \quad \Rightarrow \quad m = -1$

Szukamy rozwiązania w postaci $y = \frac{z(x)}{x}$

$$\left(\frac{2}{x^2} - \frac{z^2}{x^2}\right) dx + \frac{dz}{x} - \frac{z}{x^2}dx = 0 \qquad / \cdot x^2$$

$$(2 - z^2 - z)\,dx + x\,dz = 0$$

$$\frac{dz}{z^2+z-2} = \frac{dx}{x} \qquad \frac{1}{z^2+z-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right)$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-1}{z+2}\right| = \ln|x| + C$$

$$\frac{x^3(z+2)}{z-1} = D \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2x^3+D}{D-x^2}$$

więc $\quad y(x) = \frac{2x^3+D}{x(D-x^2)}$

5) Równanie różniczkowe zupełne

Niech $X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0$

i spełniona będzie relacja $\frac{\partial X(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$

Wtedy istnieje taka funkcja $U(x,y)$, że

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{i} \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Jeśli potrafimy znaleźć $U(x,y)$, to ogólne rozw. $U(x,y) = C$.

Przykład

$$(3x^2+6xy^2)\,dx + (6x^2y+4y^3)\,dy = 0.$$

jest zupełne, bo $\dfrac{\partial(3x^2+6xy^2)}{\partial y} = \dfrac{\partial(6x^2y+4y^3)}{\partial x} = 12xy$

Czyli istnieje U, taka że

$$3x^2+6xy^2 = \frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow U = x^3 + 3x^2y^2 + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \frac{\partial C}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4 + D$$

więc rozw. jest w postaci uwikłanej $\underline{x^3+3x^2y^2+y^4+D}$

Dla wielu równań warunek zupełności nie jest spełniony, ale pewną klasę równań można łatwo sprowadzić do postaci r. r. zupełnego.

Zauważmy, że równanie $X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0$ nie ulegnie zmianie, jeśli pomnożymy je przez pewną funkcję $\mu(x,y)$.

Jeśli uda nam się tak dobrać $\mu(x,y)$, żeby

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x,y)\,X(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(x,y)\,Y(x,y)\big)$$

to równanie jest zupełne, tzn. istnieje taka $U(x,y)$, że

$$\mu(x,y)\,X(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\mu(x,y)\,Y(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$\therefore$ $U(x,y) = C$ jest uwikłaną postacią rozwiązania zadanego równania.

Funkcję $\mu(x,y)$ nazywamy <u>czynnikiem całkującym</u>

W ogólności znalezienie czynnika całkującego może być równie trudne, co znalezienie rozwiązania. Sytuacja upraszcza się, gdy taki czynnik zależy tylko od jednej zmiennej.

Załóżmy, że istnieje czynnik całkujący $\mu(x)$.

Wówczas z

$$\frac{\partial(\mu X)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Y)}{\partial x}$$ dostajemy

$$\mu \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{d\mu}{dx} Y + \mu \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx$$

lewa strona zależy tylko od x, a więc i prawa musi zależeć tylko od x.

Oznaczmy $$f(x) = \frac{1}{Y(x,y)}\left(\frac{\partial X(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}\right)$$

ta własność może posłużyć jako kryterium sprawdzenia czy $\mu(x)$.

Stąd dostajemy postać czynnika całkującego

$$\mu(x) = \exp \int f(x)\,dx$$

analogiczne rozumowanie w sytuacji, gdy μ zależy tylko od y

$$g(y) = \frac{1}{X(x,y)}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

i $\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}$.

Przykład Rozwiążmy równanie

(*) $(1-x^2y)\,dx + x^2(y-x)\,dy = 0.$

równanie nie jest zupełne, bo $\frac{\partial(1-x^2y)}{\partial y} \neq \frac{\partial(x^2(y-x))}{\partial x}$

Sprawdzamy

$$\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2(y-x)}\left(-x^2 + 3x^2 - 2xy\right) =$$

$$= \frac{2(x^2-xy)}{x^2(y-x)} = \frac{-2x\,\text{[redacted]}}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

czyli $f(x) = -\frac{2}{x}$ ✓

Stąd czynnik całkujący $\mu(x) = e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$

Mnożymy równanie (*) przez $\mu(x)$

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y-x)\,dy = 0.$$

to jest r. zupełne.

Więc $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - y \Rightarrow U = -\frac{1}{x} - xy + g(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + g' = y - x \Rightarrow g' = y \Rightarrow g = \frac{1}{2}y^2 + C$

rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$\boxed{-\frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y^2} = C}$$

5° Równanie liniowe niejednorodne

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)}$$

gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są znanymi funkcjami.

Konstrukcję ogólnego rozwiązania zaczniemy od znalezienia ogólnego rozwiązania równania liniowego jednorodnego

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = 0.$$

$$\frac{dy}{y} = -\, p(x)\, dx$$

$$y(x) = C \cdot e^{\int -p(x)\, dx}$$

Teraz rozwiążemy r. niejednorodne metodą „uzmienniania stałej", tzn zakładamy, że stała C jest nieznaną funkcją x.

$$y(x) = C(x)\, e^{\int -p(x)\, dx}.$$

Podstawiamy

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = \frac{dC}{dx}\, e^{\int -p(x) dx} + (-p(x))\, C(x)\, e^{-\int p(x) dx}$$

$$+\, p(x)\, y = q(x)$$

więc

$$\frac{dC}{dx} = q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}$$

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x) dx}\, dx + D.$$

rozwiązanie:

$$y(x) = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x) dx} + D \right) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

$$= \underbrace{e^{-\int p(x) dx} \int q(x)\, e^{\int p(x) dx}}_{\text{to jest szczególne rozw. r. niejednorodnego}} + \underbrace{D\, e^{-\int p(x) dx}}_{\text{to jest ogólne rozw. r. jednorodnego}}$$

Przykład. Rozwiązujemy równanie

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 3x \quad \text{dla} \quad x > 0 \qquad (*)$$

i znajdujemy rozw. spełniające war. pocz. $y(1)=1$.

Najpierw r. liniowe jednorodne

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c$$

$$y = \frac{c}{x}$$

teraz założymy, że $y = \frac{C(x)}{x}$ i wstawiamy do $(*)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dC}{dx} - \frac{C}{x^2}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dc}{dx} - \cancel{\frac{C}{x^2}} + \cancel{\frac{1}{x}\frac{C}{x}} = 3x$$

$$\frac{dc}{dx} = 3x^2 \Rightarrow C = x^3 + D$$

Zatem ogólnym rozwiązaniem jest $y(x) = x^2 + \frac{D}{x}$

Teraz war. początkowy $y(1)=1 \Rightarrow D = 0. \Rightarrow y = x^2$

Równanie Bernoulliego. Jest to uogólnienie r. r. liniowego mające postać:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x) \cdot y^m$$

(gdy $m \neq 0, 1$)

Sprowadzamy je do r. liniowego przez podstawienie

$$z = y^{1-m}$$

Różniczkując obie strony $z' = (1-m) y^{-m} y'$

więc $y' = \frac{z' y^m}{1-m}$

po wstawieniu $\frac{z' y^m}{1-m} + p(q) y = q(x) y^m$

dzieląc strony przez y^m

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-m) p(x) z = (1-m) q(x).$$

Przykład
$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y} = y^{+\frac{1}{2}} x$$

szukamy ~~podstaw~~ w postaci $z = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} y' \qquad y' = 2\sqrt{y}\, z'$$

$$z' + \frac{x}{2(1-x^2)} z = \frac{x}{2}$$

r. jednorodne
$$\frac{dz}{z} = -\frac{x\,dx}{2(1-x^2)}$$

$$\ln|z| = \frac{1}{4}\ln|1-x^2|$$

$$z = C(1-x^2)^{1/4}$$

teraz niejednorodne na z przez uzmiennienie stałej

$$C'(1-x^2)^{1/4} - \frac{1}{4}C\frac{2x}{(1-x^2)^{3/4}} + \frac{x\,C(1-x^2)^{1/4}}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$$

$$dC = \frac{x}{2(1-x^2)^{1/4}}\,dx \Rightarrow C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/4} + D$$

$$z = D(1-x^2)^{1/4} - \frac{1}{3}(1-x^2)$$

czyli
$$y(x) = \left(D(1-x^2)^{1/4} - \frac{1}{3}(1-x^2)\right)^2$$

Równanie Riccati'ego

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

można sprowadzić do równania liniowego, jeśli znamy jakiekolwiek rozwiązanie szczególne tego równania.

Niech y_1 - będzie szczególnym rozwiązaniem.

tzn $\dfrac{dy_1}{dx} = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$

Wówczas szukamy rozwiązania ogólnego w postaci

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}.$$

Wstawiając, mamy

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = P y_1^2 + Q y_1 + R + \frac{2 P y_1}{z} + \frac{P}{z^2} + \frac{Q}{z}$$

$$z' + (2 P y_1 + Q) z = - P$$

r. liniowe niejednorodne.

Przykład:

Rozważmy równanie $y' = -y^2 + 1 + x^2$

zauważmy, że funkcja $y = x$ jest szczególnym rozw.

Podstawiając $y = x + \frac{1}{z}$ dostajemy równanie

$$z' - 2zx = 1$$

, to już jest liniowe niejednorodne.

r. jednorodne $\frac{dz}{dx} = 2zx$ $\quad \frac{dz}{z} = 2x\,dx$

~~$z = Ce^{\int 2x\,dx}$~~ $\quad z = C e^{x^2}$

$$1 = z' - 2zx = C' e^{x^2} + \cancel{C\, 2x e^{x^2}} - \cancel{2x\, C e^{x^2}}$$

$$C' = e^{-x^2} \qquad C = D + \int e^{-x^2} dx$$

$$z = e^{x^2}\left(D + \int e^{-x^2} dx \right)$$

czyli ogólnym rozwiązaniem jest $y(x) = x + \dfrac{e^{-x^2}}{D + \int e^{-x^2} dx}$.

Do tej pory zajmowaliśmy się r.r. postaci

$y' = f(x, y)$, tzn. $F(x, y, y') = 0$ dających się rozwikłać względem y'.

Teraz zajmiemy się r. innej postaci, gdy $F(x, y, y') = 0$ nie da się rozwikłać względem y'.

A.) Załóżmy że $F(x, y') = 0$
i możemy znaleźć taką parametryzację $x = \varphi(t)$, $y' = \xi(t)$,
że po wstawieniu r. $F=0$ jest spełnione dla każdego t.

Wówczas:

$$dy = y'dx = \xi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

czyli

$$\begin{cases} y(t) = \int \xi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C \\ x(t) = \varphi(t) \end{cases}$$

Przykład: r. $e^{y'} + y' = x$

parametryzacja $y' = t$, $x = e^t + t$ spełnia to równ.

więc rozw.

$$\begin{cases} y(t) = \int t\,(e^t + 1)\,dt + C = e^t(t-1) + \frac{1}{2}t^2 + C \\ x = e^t + t \end{cases}$$

B.) Podobnie, gdy r. postaci $F(y, y') = 0$

$$y = \varphi(t), \quad y' = \xi(t)$$

$$dy = y'\,dx$$

$$\varphi'\,dt = \xi\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\varphi'}{\xi}\,dt \qquad x(t) = \int \frac{\varphi'}{\xi}\,dt + C$$

C.) r.r. $y = f(x, y')$

Szukamy rozw. w postaci param. $y = f(x, p)$, $p = y'$

Mamy $dy = y'\,dx = p\,dx$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp = p\,dx \qquad \text{r. na funkcję } p$$

Jeśli uda nam się znaleźć rozw. ogólne tego równ. $p = \varphi(x, C)$
to $y = f(x, \varphi(C, x))$ jest całką ogólną równania (C)

Zastosowania

A. Równanie różniczkowe jednoparametrowej rodziny krzywych

Ogólne rozw. r. r. I-go rzędu jest jednoparametrową rodziną krzywych. Zagadnienie to możemy odwrócić; zastanowić się, jakie równanie spełnia rodzina krzywych dana relacją

$$\begin{cases} y(x) = f(x, C) \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \quad \text{i eliminujemy } C.$$

Stąd dostajemy relację między x, y i y', a więc r. r. $F(x,y,y')=0$.

Jeśli mamy n-parametrową rodzinę krzywych $y = f(x; C_1, \dots, C_n)$ to różniczkując n razy dostajemy $n+1$ równań, z których eliminując $C_1, \dots C_n$ dostajemy r. r. n-tego rzędu $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Przykład: weźmy $y = Cx$, mamy $y' = C$ $\Big\} \Rightarrow$ $y = xy'$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ które jest rozwiązalne

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ $\quad \ln y = \ln c + \ln x = \ln cx$

$y = Cx$.

B. Możemy teraz poszukać rodziny krzywych R', które przecinają z daną rodziną krzywych R pod stałym kątem.

Niech rodzina R postaci $y = \phi(x, c)$ dana przez $F(x, y, y') = 0$

i to możemy rozwiązać do postaci

$$y' = f(x, y).$$

Szukamy krzywych R', które przecinają R pod tym samym kątem α, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad m = tg\, \alpha$.

Niech szukana rodzina R' będzie dana przez $y = \psi(x, D)$

Tangensy kątów nachylenia do osi x w dowolnym punkcie (x, y) wynoszą $tg\, \alpha_\phi = \phi'(x, c)$ $\quad \left(' \equiv \frac{\partial}{\partial x} \right)$

$tg\, \alpha_\psi = \psi'(x, c)$

Kąt przecięcia α spełnia

$$m = tg\,\alpha = tg(\alpha_\phi - \alpha_\psi) = \frac{tg\,\alpha_\phi - tg\,\alpha_\psi}{1 + tg\,\alpha_\phi\, tg\,\alpha_\psi} =$$

$$= \frac{\phi' - \psi'}{1 + \phi'\psi'}$$ Rozwiązując względem ϕ'

mamy $$\phi' = \frac{m + \psi'}{1 - m\psi'} = f(x,y)$$

Rodzina szukanych krzywych R' z kątem nachylenia $\psi' = y'$ spełnia więc r. różniczkowe

$$F\left(x, y, \frac{y' + m}{1 - my'}\right) = 0.$$

W szczególności, jeśli szukamy zbioru krzywych R' prostopadłych do zadanej rodziny R, to znaczy $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, $m \to \pm\infty$

i równanie rodziny krzywych $\perp$ do zadanej jest postaci

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

<u>Przykład</u> Równanie rodziny krzywych $y = Cx$ ma postać $y' = \frac{y}{x}$.

a rodziny krzywych przecinających pod kątem ~~π~~ α jest więc postaci

$$\frac{m + y'}{1 - my'} = \frac{y}{x}.$$

Mamy to rozwiązać względem $y' = \dfrac{\frac{y}{x} - m}{1 + m\,y/x}$

r. jednorodne, rozwiązujemy podstawiając $y = xz$ $\quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

$$-m\frac{dx}{x} = \frac{1 + mz}{1 + z^2}\,dz$$

$$-m(\ln|x| + D) + \cancel{\frac{m}{2}\ln} = \operatorname{arctg} z + \frac{m}{2}\ln(1 + z^2)$$

wracając do zmiennej y

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{m}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) = -mD$$

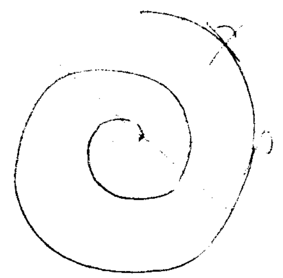
Jeśli wprowadzimy współrzędne biegunowe $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

to

$$\varphi + m\ln|r| = -m\hat{D}$$

$$r = De^{-\varphi/m}, \quad D>0$$

Jest to rodzina spiral logarytmicznych

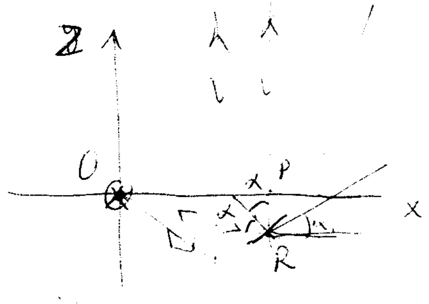


W szczególnym przypadku dla $n = \pm\infty$ mamy rodzinę okręgów.

<u>Przykład</u> Doskonały teleskop lub reflektor.

Jaki kształt powinna mieć powierzchnia odbijająca, żeby skupiała równoległe wiązki światła w jednym punkcie?

Bierzemy tę pow. obrotową



Z prawa odbicia $\alpha_r = \alpha_i$

$$\sphericalangle PRO = 2\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}2\alpha = -\frac{x}{z}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = z'(x) =$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow -\frac{x}{z} = \frac{2z'}{1-z'^2}$$

$$z = -x\,\frac{1-z'^2}{2z'} = \frac{1}{2}\left(z' - \frac{1}{z'}\right)x$$

$z = F(x, z')$ przykład takiego r.r.

Takie równanie też można rozwiązać parametrycznie

Oznaczmy $z' = p$ $p(x)$ – pewna funkcja

$$z = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) x$$

$$dz = \underbrace{p\,dx = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx}\; + \frac{\partial F}{\partial p}\,dp$$

rozwiązujemy ze względu na p. i wówczas

$$z = \frac{1}{2}\left(p(x) - \frac{1}{p(x)}\right) x$$

A więc

$$p\,dx = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) dx + \frac{1}{2} x \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) dp$$

$$0 = -\frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) dx + \frac{1}{2}\frac{x}{p}\left(p + \frac{1}{p}\right) dp$$

$$0 = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{x}{p}\,dp - dx\right) = 0$$

$$\frac{x}{p}\,dp = dx \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad p = Cx.$$

A więc rozwiązanie ma postać

$$z(x) = \frac{1}{2}\left(Cx - \frac{1}{Cx}\right) x = \frac{1}{2} Cx^2 - \frac{1}{2C}$$

i dla przestrzeni $z(x) = \frac{1}{2} C\left(x^2 + y^2\right) - \frac{1}{2C}$

paraboloida obrotowa