Zadania z mechaniki dla nanostudentów. Seria 6.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1
Na stole leży sznur o całkowitej długości l. Początkowo 1/4 jego długości zwisa z krawędzi stołu pionowo w dół. Współczynnik tarcia (dynamicznego) sznura o stół wynosi f. Po jakim czasie sznur zsunie się całkowicie ze stołu?

Zadanie 2
Punkt materialny o masie m zsuwa się w polu grawitacyjnym g mającym kierunek osi z po paraboli opisanej wzorem $z^2 = ax$ (ruch jest płaski). Zakładając, że ruch zaczął się z wysokości $z = h$, na której prędkość punktu była równa zeru, znaleźć siłę reakcji w funkcji położenia i równanie wyznaczające miejsce, w którym punkt oderwie się od paraboli. Wskazówka: Pamiętać, że siła reakcji nie wykonue pracy, w związku z czym energia mechaniczna jest podczas ruchu stała.

Zadanie 3
Dwa punkty o masach m_1 i m_2 połączone nicią o długości l pozostają stale na paraboli $z = \frac{1}{2}ax^2$ w polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ (oś z jest skierowana w dół). Posługując się zasadą d'Alemberta znaleźć ich położenie równowagi.

Zadanie 4
Wewnątrz rurki obracającej się wokół osi z (równoległej do kierunku pola grawitacyjnego) z prędkością kątową ω znajduje się koralik o masie m zaczepiony do osi obrotu sprężynką. Sprężynka ma zerową długość swobodną, tj. Siła przyciągająca koralik do osi obrotu dana jest wzorem $F_r = -kr$. Dodatkowo, siła tarcia dynamicznego $\mathbf{F}_{\text{tarcie}} = -\mu|\mathbf{F}_{\text{nac}}|\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Znaleźć ruch koralika wzdłuż osi rurki uwzględniając siłę odśrodkową i siłę Coriolisa.

Rozwiąznie zadania 1
Zadanie ze sznurem.

To jest jak ruch dwu ciał każde o zmiennej masie. Kawałek sznura leżący na stole ma zmienną masę. Kawałki odczepiające się od niego (przechodzące do kawałka zwisającego) mają zerową prędkość względem sznura. Obowiązuje wtedy równanie Newtona $m(t)a = F$ (zmienna masa nie pod pochodnymi po czasie).

Zatem, oznaczając przez z długość zwisającej części sznura, a $(l-z)$ długość tej części, która jeszcze leży na stole oraz gęstość masy sznura na jednostkę jego długości przez ρ, mamy

$$\begin{aligned}(l-z)\rho\frac{d^2z}{dt^2} &= T - f(l-z)g\rho \ ,\\ z\rho\frac{d^2z}{dt^2} &= z\rho g - T \ ,\end{aligned}$$

Wstawiając T z pierwszszego do drugiego dostajemy równanie

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{g}{l}(1+f)z - fg \ .$$

To ma rozwiązanie

$$z(t) = \frac{f}{1+f}\,l + A\exp\left(t\sqrt{\frac{g}{l}(1+f)}\right) + B\exp\left(-t\sqrt{\frac{g}{l}(1+f)}\right) \ .$$

Warunki początkowe, $z(0) = \frac{1}{4}l$, $\dot{z}(0) = 0$, dają

$$z(t) = \frac{f}{1+f}\,l + l\,\frac{1-3f}{8(1+f)}\left[\exp\left(t\sqrt{\frac{g}{l}(1+f)}\right) + \exp\left(-t\sqrt{\frac{g}{l}(1+f)}\right)\right] \ .$$

Czas spadku sznura to taki czas t_s, że $z(t_s) = l$. Czyli

$$\exp\left(t_s\sqrt{\frac{g}{l}(1+f)}\right) + \exp\left(-t_s\sqrt{\frac{g}{l}(1+f)}\right) = \frac{8}{1-3f} \ .$$

Otrzymujemy stąd

$$t_s = \sqrt{\frac{l}{g(1+f)}}\,\ln\left(\frac{4+\sqrt{15+6f+9f^2}}{1-3f}\right) \ .$$

Rozwiąznie zadania 2
Mamy równanie paraboli $z^2 - ax = 0$ oraz równania Newtona

$$\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\lambda a \ ,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mg + 2\lambda z \ .\end{aligned}$$

Dwukrotne zróżniczkowanie równania paraboli po czasie daje

$$2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2z\frac{d^2z}{dt^2} - a\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \ .$$

Drugie pochodne można wziąć bezpośrednio z równań Newtona. Aby wyznaczyć $\dot{y}$ korzystamy z zachowania energii: mnożymy pierwsze równanie Newtona przez $\dot{x}$, drugie przez $\dot{z}$ i zapisujemy je w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) &= -\lambda a\dot{x} \ , \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right) &= \frac{d}{dt}(-mgz) + 2\lambda z\dot{z} \ . \end{aligned}$$

Dodajemy je do siebie i mamy

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + mgz\right] = 0 \ ,$$

ponieważ $-\lambda a\dot{x} + 2\lambda z\dot{z} = \lambda\frac{d}{dt}(z^2 - ax) = 0$. Uwzględniając warunki początkowe $E_{\mathrm{tot}} = mgh$ mamy

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + mg(z-h) = 0 \ .$$

Eliminujemy stąd $\dot{x}$ korzystając z raz zróżniczkowanego równania paraboli: $\dot{x} = 2z\dot{z}$ i mamy, że

$$\dot{z}^2 = \frac{2g(h-z)}{1+(2z/a)^2} \ .$$

Mamy już wszystko do wstawienia do dwukrotnie zróżniczkowanego równania paraboli:

$$2\,\frac{2g(h-z)}{1+(2z/a)^2} + 2z\left(-g + 2\frac{\lambda}{m}z\right) + \frac{\lambda}{m}a^2 = 0 \ .$$

Punkt odrywa się, gdy $\lambda = 0$, czyli gdy spełniony jest związek

$$2h - 3z - \frac{4}{a^2}\,z^3 = 0 \ .$$