Zadania z mechaniki dla nanostudentów. Seria 5.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1

W polu grawitacyjnym g na nitce zaczepionej do sufitu wisi masa m_1. Do masy m_1 przyczepiona jest nieważka sprężynka o długości swobodnej l i współczynniku sprężystości k. Na drugim końcu sprężynki wisi masa m_2. W chwili $t = 0$ nitkę, na której wisiała masa m_1 przecięto. Znaleźć ruch tego układu wzdłuż pionowej osi.

Zadanie 2

Wewnątrz rurki obracającej się wokół osi z (równoległej do kierunku pola grawitacyjnego) z prędkością kątową ω znajduje się koralik o masie m zaczepiony do osi obrotu sprężynką. Sprężynka ma zerową długość swobodną, tj. siła przyciągająca koralik do osi obrotu dana jest wzorem $F_r = -kr$. Wskutek chropowatości ścianek rurki występuje dodatkowo siła tarcia dynamicznego $\mathbf{F}_{\text{tarcie}} = -\mu|\mathbf{F}_{\text{nac}}|\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, gdzie $\mathbf{F}_{\text{nac}}$ jest siłą z jaką koralik naciska na ściankę rurki. Znaleźć ruch koralika wzdłuż osi rurki uwzględniając także siłę odśrodkową i siłę Coriolisa.

Zadanie 3

Na płaskiej powierzchni stołu leży klin o masie M, kącie nachylenia α i wysokości górnej krawędzi h. Po klinie, wskutek działania skierowanego pionowo pola grawitacyjnego g, może zsuwać się klocek o masie m. (Dotąd jest tu wszystko jak w przykładzie na ćwiczeniach). Pomiędzy klockiem a klinem występuje siła tarcia dynamicznego równa co do wartości sile nacisku klocka na na klin razy współczynnik μ_1. Podobna siła tarcia, o współczynniku μ_2 występuje pomiędzy klinem a stołem. Posługując się równaniami Newtona z więzami znaleźć siły reakcji pomiędzy klinem a klockiem oraz pomiędzy klinem a stołem.

Rozwiązanie zadania 1
Wygodnie jest skierować oś x wzdłuż układu (nitki, mas i sprężyny) w dół, i wybrać zero położenia masy m_1 w punkcie jej zaczepienia do nici tak, że dla $t = 0$ położenie masy m_1 jest $x_1(0) = 0$. Przemieszczenie masy m_2 wygodnie jest liczyć od punktu położonego o l_0 w dół , także gdyby sprężyna nie była napięta mielibyśmy $x_2(0) = 0$. W takich zmiennych, dopóki nić pozostaje nienaruszona układ opisują równania

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 &= m_1 g + k(x_2 - x_1) - T \ , \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 &= m_2 g - k(x_2 - x_1) \ , \end{aligned}$$

gdzie T jest siłą z jaką nić ciągnie masę m_1 (w górę). Ponieważ póki nić jest cała mamy $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, musi być $x_1 = 0$, $x_2 = m_2 g/k$, $T = (m_1 + m_2)g$.

Po przecięciu nici obowiązują zaś równania

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 &= m_1 g + k(x_2 - x_1) \ , \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 &= m_2 g - k(x_2 - x_1) \ , \end{aligned}$$

Aby je rozwiązać dodajemy je stronami co daje

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = (m_1 + m_2)g \ ,$$

(czyli równanie ruchu środka masy układu dwu mas), oraz odejmujemy od drugiego pierwsze po uprzednim podzieleniu ich przez odpowiednie masy; Dla zmiennej $\xi = x_2 - x_1$ daje to równanie

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi = -\Omega^2 \xi \ ,$$

gdzie $\Omega^2 = (k/m_1) + (k/m_2)$. Rozwiązaniami są

$$\begin{aligned} m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t) &= A + Bt + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g t^2 \ , \\ x_2(t) - x_1(t) &= C \cos \Omega t + D \sin \Omega t \ . \end{aligned}$$

Stałe A, B, C i D trzeba wyznaczyć z warunków początkowych: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = m_2 g/k$ oraz $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Stąd

$$\begin{aligned} A &= \frac{m_2^2 g}{k} \ , \\ C &= \frac{m_2 g}{k} \ , \\ B &= 0 \ , \\ D &= 0 \ . \end{aligned}$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{1}{m_1+m_2}\left[\frac{m_2^2 g}{k} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)gt^2 - \frac{m_2^2 g}{k}\cos\Omega t\right] , \\
x_2(t) &= \frac{1}{m_1+m_2}\left[\frac{m_2^2 g}{k} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)gt^2 + \frac{m_1 m_2 g}{k}\cos\Omega t\right] .
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie zadania 3
Jeśli oś z jest skierowana do góry, a x w prawo, i górna krawędź klina jest na prawo od jego najniższego punktu to we współrzędnych klina (X, Z) i klocka (x, z) równania więzów są następujące:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,z,X,Z) &= y + (X-x)\tan\alpha - Y - h , \\
f_2(x,z,X,Z) &= Y .
\end{aligned}
$$

Pierwsze wyraża fakt, że klocek leże na powierzchni klina, a drugie, fakt, że klin leży na stole. Równaniami Newtona są[1]

$$
\begin{aligned}
M\frac{d^2}{dt^2}X &= \lambda_1\tan\alpha + s_1\mu_1\lambda_1 - s_2\mu_2\lambda_2 , \\
M\frac{d^2}{dt^2}Y &= -Mg - \lambda_1 + \lambda_2 + s_1\mu_1\lambda_1\tan\alpha , \\
m\frac{d^2}{dt^2}x &= -\lambda_1\tan\alpha - s_1\mu_1\lambda_1 , \\
m\frac{d^2}{dt^2}y &= -mg + \lambda_1 - s_1\mu_1\lambda_1\tan\alpha .
\end{aligned}
$$

Aby napisać siły tarcia, napisaliśmy tu po prostu wektory prostopadłe do wiktorów siłe reakcji stosując zwykły trick polegający na zamianie miejscami składowych wektora siły reakcji i zmianie znaku jednej z nich. s_1 i s_2 są znakami związanymi z kierunkami prędkości (te zaś zależą od warunków początkowych - np. można mieć w chwili $t = 0$ klin o prędkości V (o dowolnym znaku) względem stołu, a klocek teȯ jakiejś niezerowej prędkości v względem klina (to jest prędkość decydująca o znaku siły tarcia). W prostej sytuacji, gdy $V = 0$ i $v = 0$, tj., klocek zaczyna się zsuwać w lewo bez prędkości początkowej, z początkowo nieruchomego klina mamy $s_1 = s_2 = +1$ (bo klin zaczyna jechać w prawo, a klocek zsuwa się po klinie w lewo).

Reszta kroków jest banalna.

[1]Zauważmy, że *najpierw* liczymy gradienty więzów a dopiero *potem* możemy je wykorzystać tj. np. tu położyć $Y = 0$. Postępując w odwrotnej kolejności nie dostalibyśmy siły reakcji między stołem a klinem.