

Zadania z mechaniki dla nanostudentów. Seria 4.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1

Łódź podwodna o całkowitej masie m jest napędzana silnikiem o stałej mocy P . Opór stawiany przez wodę można w przybliżeniu opisać siłą $F = -\kappa v$, gdzie v jest prędkością łodzi. Zakładając, że prędkość łodzi w chwili $t = 0$ była równa zeru znaleźć jej prędkość i położenie w dowolnej chwili t . Znaleźć też czas po którym osiągnie ona prędkość równą połowie maksymalnie możliwej (tj. połowie prędkości granicznej). Jaka będzie prędkość łodzi po długim czasie, jeśli wystartowała ona z prędkością większą od prędkości granicznej?

Wskazówka: Aby ułożyć równanie różniczkowe opisujące ruch, rozpatrzeć zmianę energii kinetycznej dE zachodzącą pod wpływem siły oporu i działania silnika w infimezmalnym przedziale czasu dt .

Zadanie 2

Korzystając z zasady zachowania energii znaleźć jednowymiarowy ruch cząstki o masie m pod działaniem siły zadanej wzorem

$$F = \frac{d}{dx} \left(\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2(x/a)} \right) .$$

Przedyskutować jakościowo przypadki całkowitej energii E większej i mniejszej od zera. W pierwszym przypadku znaleźć porównać czas przelotu cząstki od $x_1 \ll 0$ do $x_2 \gg 0$, gdy działa siła F i bez tej siły. W drugim przypadku zbadać reżim małych drgań wokół położenia równowagi.

Zadanie 3

Kulka o masie m i promieniu R opada na dno naczynia wypełnionego cieczą. W naczyniu działa na nią siła oporu $\mathbf{F} = -\kappa \mathbf{v}$. Znaleźć ruch tej cząstki uwzględniając siłę Coriolisa i siłę wyporu. (załóżmy, że rzecz się dzieje na półkuli północnej na szerokości geograficznej φ) jeśli $\mathbf{v}(0) = 0$.

Rozwiązanie Zadania 1

Przy przemieszczeniu się łodzi w czasie dt o $d\mathbf{r}$ siła oporu wykonuje pracę $-\kappa\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$, a praca wykonana przez silnik łodzi wynosi Pdt . Zatem zmiana energii kinetycznej łodzi wynosi

$$dE_{\text{kin}} = -\kappa\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + Pdt ,$$

lub, inaczej,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) = -\kappa \mathbf{v}^2 + P .$$

Uzyskujemy zatem równanie różniczkowe, które w przypadku ruchu jednowymiarowego (po prostej) całkowanie wyznacza jego zależność czasową. Całkując stronami wzorek

$$\frac{dv^2}{P - \kappa v^2} = \frac{2}{m} dt ,$$

od $v(0) = 0$ do $v(t)$ znajdujemy

$$v^2 = \frac{P}{\kappa} \left(1 - e^{-2(\kappa/m)t} \right) .$$

Widać stąd, że dla $t \rightarrow \infty$ prędkość łodzi dąży do stałej

$$v_{\text{gr}} = \sqrt{\frac{P}{\kappa}} .$$

Zależność od czasu przebytej przez łódź drogi można znaleźć całkując

$$s(t) = \sqrt{\frac{P}{\kappa}} \int_0^t dt' \left[1 - e^{-2(\kappa/m)t'} \right]^{1/2} = \frac{m}{2\kappa} \sqrt{\frac{P}{\kappa}} \int_0^{2\kappa t/m} d\xi \sqrt{1 - e^{-\xi}} .$$

Całka ta, choć nieciekawa daje się wyliczyć ściśle. Zanim to jednak zrobimy, zobaczymy jak droga s narasta dla małych czasów, tj. dla $t \ll (m/2\kappa)$. Wtedy $\exp$ można rozwinąć w szereg Taylora

$$s(t) = \frac{m}{2\kappa} \sqrt{\frac{P}{\kappa}} \int_0^{2\kappa t/m} d\xi \sqrt{1 - (1 - \xi + \frac{1}{2}\xi^2 - \dots)} \approx \frac{m}{2\kappa} \sqrt{\frac{P}{\kappa}} \int_0^{2\kappa t/m} d\xi \xi^{1/2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2P}{m}} t^{3/2} .$$

Zatem zaraz po starcie przebyta droga narasta jak $t^{3/2}$. Z kolei, gdy chcemy zobaczyć jak przyrasta droga dla czasów $t \gg (m/2\kappa)$, możemy zbadać przyrost

$$s(t) - s(t_0) = \frac{m}{2\kappa} \sqrt{\frac{P}{\kappa}} \int_{2\kappa t_0/m}^{2\kappa t/m} d\xi \sqrt{1 - e^{-\xi}} ,$$

dla $t > t_0$ gdzie także $t_0 \gg (m/2\kappa)$. Wtedy oczywiście czynnik $e^{-\xi}$ pod pierwiastkiem jest zawsze mały i mamy

$$s(t) - s(t_0) \approx \frac{m}{2\kappa} \sqrt{\frac{P}{\kappa}} \int_{2\kappa t_0/m}^{2\kappa t/m} d\xi = \sqrt{\frac{P}{\kappa}} (t - t_0) ,$$

czyli droga przyrasta liniowo z prędkością v_{gr} .

Aby obliczyć całkę

$$s(t) = \frac{m}{2\kappa} \sqrt{\frac{P}{\kappa}} \int_0^{2\kappa t/m} d\xi \sqrt{1 - e^{-\xi}},$$

dokładnie, robimy zamianę zmiennych: $z = 1 - e^{-\xi}$, $d\xi = (1 - z)^{-1} dz$. Mamy więc całkę

$$\int \frac{\sqrt{z}}{z-1} dz,$$

i następnie podstawiamy $z = x^2$, co sprowadza ją do

$$2 \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = 2 \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x^2} dx = -2x + 2 \int \frac{dx}{1-x^2} = -2x + \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(Zauważmy, że zmienna z jest z przedziału $(0, 1)$ więc zmienna x też; zatem wyrażenie pod logarytmem jest dodatnie.) Teraz wracamy do starej zmiennej ξ

$$= -2\sqrt{z} + \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = -2\sqrt{1-e^{-\xi}} + \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{-\xi}}}{1-\sqrt{1-e^{-\xi}}}.$$

Ostatecznie więc zależność drogi przebytej przez łódź od czasu jest dana ścisłym wzorem

$$s(t) = \frac{m}{2\kappa} \sqrt{\frac{P}{\kappa}} \left\{ -2\sqrt{1 - e^{-2(\kappa/m)t}} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2(\kappa/m)t}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2(\kappa/m)t}}} \right\}.$$

Oczywiście, rozwinięcie tego wyrażenia dla $t \sim 0$ w szereg Taylora daje wzorek otrzymany poprzednio, tj. $s(t) \propto t^{3/2}$.

Aby odpowiedzieć na pytanie, po jakim czasie rozpędzająca się łódź osiągnie $4/5$ prędkości granicznej musimy przyrównać

$$\left(\frac{4}{5}v_{\text{gr}}\right)^2 = \frac{P}{\kappa} \left(1 - e^{-2(\kappa/m)t}\right),$$

co da

$$e^{-2(\kappa/m)t} = \frac{9}{25}, \quad \text{czyli} \quad t = \frac{m}{\kappa} \ln \frac{5}{3}.$$

Gdyby łódź wystartowała z prędkością $v_0 \neq 0$ to scałkowanie wzoru by dało

$$v^2(t) = \frac{P}{\kappa} \left(1 - e^{-2(\kappa/m)t}\right) + v_0^2 e^{-2(\kappa/m)t}.$$

Widać stąd, że jeśli $v_0 > v_{\text{gr}}$ to prędkość stale maleje aż osiągnie wartość v_{gr} . W równaniu różniczkowym

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{2}{m} (P - \kappa v^2).$$

punkt $v^2 = P/\kappa$ jest tzw. (przyciągającym) *punktem stałym*.