

Zadania z mechaniki dla nanostudentów. Seria 3.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1

Po równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu równym α zsuwa się klocek o masie m , na który działa siła oporu $\mathbf{F} = -m \kappa \mathbf{v}$. Znaleźć położenia klocka w funkcji czasu jeśli w chwili $t = 0$ znajdował się on na wysokości h . Sprawdzić, że w granicy $\kappa \rightarrow 0$ dostaje się “szkolne” rozwiązanie. Obliczyć stratę energii mechanicznej (kinetycznej plus potencjalnej) klocka po zjechaniu z wysokości h i porównać ją z pracą wykonaną przez siłę oporu.

Zadanie 2

Znaleźć i przedyskutować tor cząstki o ładunku q i masie m poruszającej się w stałym i jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ w ośrodku, w którym działa na nią siła oporu $\mathbf{F} = -m \kappa \mathbf{v}$.

Wskazówka: równania ruchu w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego najłatwiej rozwiązać wprowadzając zmienną zespoloną $\xi = x + iy$.

Zadanie 3

Rakiety V2, którymi ostrzeliwano Londyn w czasie II Wojny Światowej przebywały drogę $s = 300$ km i na skutek działania siły Coriolisa doznawały odchylenia $x = 3700$ m (w którą stronę?). Zakładając, że leciały one ze stałą prędkością wzdłuż południka znaleźć czas ich lotu. Przyjąć, że szerokość geograficzna miejsca wystrzelenia i Londynu była mniej więcej ta sama i wynosiła 52° .

Rozwiązanie zadania 1

Wyberzmy oś x układu współrzędnych wzdłuż równi i w dół. Równanie Newtona ma wtedy tylko x -ową składową:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m g \sin \alpha - m \kappa \frac{dx}{dt} .$$

Trzeba zatem scałkować równanie

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha - \kappa v .$$

Całkowanie

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{g \sin \alpha - \kappa v} = \int_0^t dt' .$$

daje

$$t = \ln \left(\frac{g \sin \alpha - \kappa v(t)}{g \sin \alpha - \kappa v_0} \right) ,$$

to jest

$$v(t) = \frac{1}{\kappa} \left[g \sin \alpha + (\kappa v_0 - g \sin \alpha) e^{-\kappa t} \right] .$$

Aby otrzymać $x(t)$ trzeba powyższe równanie jeszcze raz scałkować:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \frac{1}{\kappa} \int_0^t dt \left[g \sin \alpha + (\kappa v_0 - g \sin \alpha) e^{-\kappa t} \right] .$$

W wyniku całkowania dostajemy

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\kappa} \left[g t \sin \alpha - \frac{\kappa v_0 - g \sin \alpha}{\kappa} (e^{-\kappa t} - 1) \right] .$$

Gdy $\kappa \rightarrow 0$ musimy rozwinąć

$$e^{-\kappa t} - 1 = -\kappa t + \frac{1}{2} \kappa^2 t^2 - \frac{1}{6} \kappa^3 t^3 + \dots$$

Wstawiamy to do wzoru na $x(t)$ i mamy:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\kappa} \left[g t \sin \alpha + (\kappa v_0 - g \sin \alpha) t - \frac{1}{2} (\kappa v_0 - g \sin \alpha) \kappa t^2 + \dots \right] \\ &= x_0 + \frac{1}{\kappa} \left[\kappa v_0 t - \frac{1}{2} \kappa^2 v_0 t^2 + \frac{1}{2} \kappa g t^2 \sin \alpha + \dots \right] \\ &\rightarrow x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \end{aligned} ,$$

tak jak być powinno.

Energia początkowa $E(0) = mgh$. Energia mechaniczna klocka w chwili t wynosi

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + mgh(t) ,$$

gdzie $h(t)$ jest chwilową wysokością klocka daną wzorem

$$h(t) = h - [x(t) - x_0] \sin \alpha .$$

Stąd zmiana energii od początku ruchu do chwili t wynosi

$$\begin{aligned} \Delta E(t) &= mgh - \left[\frac{1}{2}mv^2(t) + mgh(t) \right] \\ &= -\frac{1}{2}mv^2(t) + mg \sin \alpha [x(t) - x_0] \\ &= -\frac{m}{2\kappa^2} \left[g \sin \alpha + (\kappa v_0 - g \sin \alpha) e^{-\kappa t} \right]^2 \\ &\quad + \frac{mg \sin \alpha}{\kappa} \left[gt \sin \alpha - \frac{\kappa v_0 - g \sin \alpha}{\kappa} (e^{-\kappa t} - 1) \right] . \end{aligned}$$

Praca siły oporu jest dana wzorem

$$W = \int_0^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F}_{\text{op}} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^t F_{\text{op}}(t) v(t) dt = -m\kappa \int_0^t v^2(t) dt .$$

Zatem

$$W = -\frac{m}{\kappa} \int_0^t \left[g \sin \alpha + (\kappa v_0 - g \sin \alpha) e^{-\kappa t} \right]^2 dt .$$

Elementarne całkowanie daje

$$\begin{aligned} W &= -\frac{m}{\kappa} g^2 t \sin^2 \alpha + \frac{2m}{\kappa^2} g \sin \alpha (\kappa v_0 - g \sin \alpha) (e^{-\kappa t} - 1) \\ &\quad + \frac{m}{2\kappa^2} (\kappa v_0 - g \sin \alpha)^2 (e^{-2\kappa t} - 1) . \end{aligned}$$

I to powinno być to samo co $\Delta E(t)$.

Rozwiązanie zadania 2

Bez straty ogólności można przyjąć taki układ odniesienia, że $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}(0) = v_0 \mathbf{e}_x + u_0 \mathbf{e}_z$.

Wektorowe równanie Newtona

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = q \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B} - m\kappa \mathbf{v}(t) ,$$

po rozpisaniu na składowe daje

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -\omega_B v_y - \kappa v_x , \\ \dot{v}_y &= \omega_B v_x - \kappa v_y , \\ \dot{v}_z &= -\kappa v_z , \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy tradycyjne oznaczenie $\omega_B = qB/m$. Rozwiązanie dla zkładowej z -owej jest oczywiste

$$\begin{aligned} v_z(t) &= u_0 e^{-\kappa t} , \\ z(t) &= \frac{u_0}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) . \end{aligned}$$

Dwa sprzężone równania na v_x i v_y można zapisać w postaci macierzowej

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \kappa & \omega_B \\ -\omega_B & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \equiv -A \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} .$$

Rozwiązanie jest wtedy (jak nauczają matematycy) postaci

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = e^{-A} \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = e^{-A} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ponieważ jednak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_B \\ -\omega_B & 0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

a macierz jednostkowa jest przemienna z każdą macierzą, można rozwiązanie zapisać od razu w postaci

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = e^{-\kappa t} \exp \left\{ -t \begin{pmatrix} 0 & \omega_B \\ -\omega_B & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Podnoszenie e do macierzy jest zwykle uciążliwe, ale tu akurat jest proste ponieważ

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_B \\ -\omega_B & 0 \end{pmatrix}^2 = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Rozwijając w szereg Taylora eksponens bez trudu znajdujemy, że

$$\exp \left\{ -t \begin{pmatrix} 0 & \omega_B \\ -\omega_B & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \cos \omega_B t & -\sin \omega_B t \\ \sin \omega_B t & \cos \omega_B t \end{pmatrix} .$$

Rozwiązanie dla v_x i v_y jest zatem postaci

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 e^{-\kappa t} \cos \omega_B t , \\ v_y(t) &= v_0 e^{-\kappa t} \sin \omega_B t . \end{aligned}$$

Po odcałkowaniu tych wzorów znajdujemy

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 e^{-\kappa t} \frac{\omega_B \sin \omega_B t - \kappa \cos \omega_B t}{\omega_B^2 + \kappa^2} + C_x , \\ y(t) &= -v_0 e^{-\kappa t} \frac{\omega_B \cos \omega_B t + \kappa \sin \omega_B t}{\omega_B^2 + \kappa^2} + C_y . \end{aligned}$$

Stałe C_x i C_y trzeba dobrać tak, by $x(0) = 0$ i $y(0) = 0$:

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 e^{-\kappa t} \frac{\omega_B \sin \omega_B t - \kappa \cos \omega_B t}{\omega_B^2 + \kappa^2} + \frac{v_0 \kappa}{\omega_B^2 + \kappa^2}, \\y(t) &= -v_0 e^{-\kappa t} \frac{\omega_B \cos \omega_B t + \kappa \sin \omega_B t}{\omega_B^2 + \kappa^2} + \frac{v_0 \omega_B}{\omega_B^2 + \kappa^2}.\end{aligned}$$

Tor ruchu w płaszczyźnie xy można znaleźć przenosząc wyrazy wolne na lewą stronę, podnosząc te wzory do kwadratu i dodając je do siebie stronami

$$[x(t) - C_x]^2 + [y(t) - C_y]^2 = \frac{v_0^2}{\omega_B^2 + \kappa^2} e^{-2\kappa t}.$$

Nie jest to ściśle rzecz biorąc równanie toru, bo czas t nie został zeń całkowicie wyeliminowany, niemniej można stąd odczytać, że torem w płaszczyźnie xy jest spirala o środku w punkcie (C_x, C_y) .

Uwaga: Sprzężone równania na $v_x(t)$ i $v_y(t)$ można scałkować też innymi sposobami, np. korzystając z liczb zespolonych $\xi(t) = v_x(t) + iv_y(t)$ lub jeszcze inaczej. Sprawdzenie, że wychodzi to samo pozostawiamy studentom.

Rozwiązanie zadania 3

Korzystamy z ogólnego wzoru na ruch w polu siły ciężżenia w układzie nieinercyjnym związanym z Ziemią

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 - \boldsymbol{\omega} t \times \left(\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \right).$$

Umieścimy początek układu w punkcie wystrzelenia pocisku V2 tak, że $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ i wybierzmy oś układu y na północ, oś x na wschód, a oś z “wzwyż”. Wtedy $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_y$, $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$, a $\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos \phi \mathbf{e}_y + \sin \phi \mathbf{e}_z)$, gdzie ϕ jest szerokością geograficzną punktu zaczepienia układu współrzędnych. Obliczamy

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & v_0 & 0 \end{vmatrix} = -v_0 \omega \sin \phi \mathbf{e}_x.$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -g \end{vmatrix} = -g \omega \cos \phi \mathbf{e}_x.$$

Prędkość v_0 pocisków znajdujemy z dystansu dzielącego miejsce ich wystrzelenia od Londynu. Wzłóż osi y ogólny wzór daje po prostu ruch jednostajny. Stąd

$$v_0 = \frac{s}{t}.$$

Odchylenie pocisków V2 (od ruchu dokładnie wzdłuż południka) jest ich przemieszczeniem wzdłuż osi x . Ogólny wzór daje nam

$$x(t) = -(-v_0\omega t^2 \sin \phi) - \frac{1}{3}(-\omega g t^3 \cos \phi) = s \omega t \sin \phi \left(1 + \frac{gt^2}{3s} \cot \phi \right) .$$

$x(t) > 0$ zatem odchylenie jest na wschód (bo na półkuli północnej rzeki płynące na północ podmywają swoje prawe brzegi). Wiedząc, że $x = 3.7$ km, a $s = 300$ km można z równania tego znaleźć czas lotu t . Równanie to jest jednak trzeciego stopnia i analitycznie jest to trudne (choć możliwe - wzory Cardano!). Gdyby jednak pominąć kawałek z t^3 to otrzymalibyśmy

$$t = \frac{x}{s \omega \sin \phi} = \frac{xT}{s 2\pi \sin \phi} = 256 \text{ sek} .$$

(T jest okresem obrotu Ziemi równym 86000 sek.) Pominiey kawałek nie jest mały:

$$\frac{gt^2}{3s} = \frac{0.01 \text{ m}}{\text{sek}^2} \frac{256^2 \text{ sek}^2}{900 \text{ km}} \approx 0.6 ,$$

($\cot 52^\circ \approx 0.78$) i do otrzymania dokładnego wyniku trzeba się trochę bardziej przyłożyć...