Zadania z mechaniki dla nanostudentów. Seria 2.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1
Wiedząc, że podczas płaskiego ruchu cząstki kąt pomiędzy kierunkiem jej wektora wodzącego $\mathbf{r}$ i wektorem jej prędkości $\mathbf{v}$ jest stały (i równy α) znaleźć we współrzędnych biegunowych:
a) wzór opisujący tor cząstki,
b) długość toru w funkcji czasu.
Przyjąć jako warunki początkowe $\varphi(0) = 0$ i $r(0) = r_0$.

Zadanie 2
Posługując się współrzędnymi biegunowymi znaleźć tor po jakim powinien z prędkością większą of prędkości dźwięku lecieć samolot, by do obserwatora stojącego na ziemi dźwięk silnika samolotu dochodził z całego toru w tej samej chwili.

Zadanie 3
Dany jest układ współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie i okrąg o promieniu R o środku w punkcie $(0, 0)$. Dana jest też prosta styczna do okręgu, która toczy się po nim bez poślizgu (bez poślizgu to znaczy, że jeśli w dwu różnych chwilach czasu zaznaczymy i na okręgu i na prostej punkty styczności, to odległość między tymi punktami na prostej bedzie równa długości łuku pomiędzy punktami styczności na okręgu) i jednostajnie. W chwili $t = 0$ prosta ta przechodzi przez punkt $(R, 0)$. Punkt A prostej ma w chwili $t = 0$ współrzędne (R, y_A). Znaleźć jego współrzędne w dowolnej chwili czasu.
Wskazówka: Załóżmy najpierw, że prosta jest przytwierdzona do okręgu na "sztywno" i że to okrąg (wraz z przytwierdzoną prostą) obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół swego środka. Napisać współrzędne punktu A w takim przypadku, a potem zastanowić się, jaką modyfikację wprowadza to, że to prosta się bez poślizgu toczy po okręgu.

Rozwiązanie zadania 1

Jeśli stały jest kąt pomiędzy wektorem prędkości $\mathbf{v}$ i wektorem wodzącym $\mathbf{r}$, to we współrzędnych biegunowych składowe radialna v_r i transwersalna v_φ wektora prędkości muszą pozostawać do siebie w stałym stosunku; stosunek ten jest bowiem wyznaczony przez kąt pomiędzy $\mathbf{v}$ i $\mathbf{r}$:

$$\frac{v_\varphi}{v_r} = \mathrm{tg}\alpha \ ,$$

gdzie α jest właśnie stałym w badanym ruchu kątem pomiędzy $\mathbf{v}$ i $\mathbf{r}$. Uwzględniając to, że $v_r = \dot{r}$, a $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, mamy stąd natychmiast równanie różniczkowe wyznaczające tor w postaci $r = r(\varphi)$:

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \mathrm{ctg}\alpha \ .$$

Rozwiązaniem jego jest spirala

$$r(\varphi) = r(\varphi_0)\ \exp\left\{(\varphi - \varphi_0)\mathrm{ctg}\alpha\right\} \ .$$

Jeśli $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ to tor ruchu jest spiralą rozwijającą się i jego długość rośnie z czasem nieograniczenie. Niemniej zawsze można obliczyć długość toru jako funkcję czasu

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t dt' |\mathbf{v}(t')| = \int_0^t dt' \sqrt{v_r^2(t') + v_\varphi^2(t')} = \int_0^t dt' \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \\ &= \int_0^t dt'\, \dot{\varphi} \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]^{1/2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]^{1/2} \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi \left[r^2\mathrm{ctg}^2\alpha + r^2\right]^{1/2} = \frac{1}{\sin\alpha}\int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi\, r(\varphi) \ , \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy ze związku $1 + \mathrm{ctg}^2 = 1/\sin^2\alpha$ i wzoru na $dr/d\varphi$. Całkując otrzymujemy

$$s(t) = \frac{r(\varphi_0)}{\sin\alpha}\int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi\, e^{(\varphi-\varphi_0)\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{r(\varphi_0)}{\cos\alpha}\ e^{(\varphi-\varphi_0)\mathrm{ctg}\alpha}\Big|_{\varphi_0}^{\varphi(t)} = \frac{r(\varphi_0)}{\cos\alpha}\left[e^{(\varphi(t)-\varphi_0)\mathrm{ctg}\alpha} - 1\right] \ ,$$

Wzór można uprościć przyjmując, że $\varphi_0 = 0$. Gdy $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, można wtedy znaleźć całkowitą długość toru ruchu of $t = 0$ do $t = \infty$ czyli of $\varphi(0) = 0$ do $\varphi(t) = \infty$:

$$s(\infty) = -\frac{r(\varphi_0)}{\cos\alpha} \ ,$$

(oczywiście gdy $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ to $\cos\alpha < 0$ i długość toru jest dodatnia).

Rozwiązanie zadania 2

Niech początek układu współrzędnych płaszczyzny, w której leży tor samolotu pokrywa się z położeniem osoby, do której dźwięk ma docierać. W zmiennych biegunowych (r, φ) tor samolotu dany wzorami $r = r(t)$ oraz $\varphi = \varphi(t)$ musi wtedy spełniać oczywisty warunek (c jest tu prędkością dźwięku w powietrzu):

$$\frac{r(t)}{c} = \frac{r(t+dt)}{c} + dt \ ,$$

co daje

$$\left(\frac{\dot{r}(t)}{c} + 1\right) dt = 0 \ ,$$

czyli $\dot{r}(t) = -c$. Parametryzując tor tak, że $r = r(\varphi)$, $\varphi = \varphi(t)$ mamy stąd

$$\frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} = -c \ .$$

Z kolei fakt, że szybkość samolotu, dana w zmiennych biegunowych wzorem $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$, jest stała, pozwala napisać

$$\dot{\varphi} = v \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]^{-1/2} \ .$$

Łącząc ten wzór z poprzednio wypisanym warunkiem, otrzymujemy różniczkowe równanie toru w postaci

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{c}{v}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]^{1/2} \ .$$

Po przekształceniu przybiera ono postać równania

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\kappa\, r \ , \qquad \text{gdzie} \quad \kappa = \left[1 - \left(\frac{c}{v}\right)^2\right]^{-1/2} \ ,$$

($c < v$ - samolot jest naddźwiękowy!), którego rozwiązaniem jest

$$r(\varphi) = r(\varphi_0)\, e^{-\kappa(\varphi - \varphi_0)} \ .$$

Rozwiązanie zadania 3
Wyraźmy najpierw współrzędne kartazjańskie (x, y) dowolnego punktu na płaszczyźnie xy przez jego współrzędne (x_0, y_0) w układzie, który ma z nieruchomym układem wspólny początek i jest obrócony o kąt α przeciwnie do wskazówek zegara:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha \ , \\ y &= x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Poprawność tego wzoru nietrudno sprawdzić: gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ powinno być $x_0 = y$ i $y_0 = -x$. Następnie wyrażamy współrzędne (x_0, y_0) przez współrzędne (x', y') układu przesuniętego o R wzdłuż osi x_0

$$\begin{aligned} x &= (x' + R)\cos\alpha - y' \sin\alpha \ , \\ y &= (x' + R)\sin\alpha + y' \cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Jeśli $\alpha = \omega t$, to układ (x', y') jest to właśnie tym układem, który jest przyczepiony do punktu na obwodzie toczącego się okręgu o promieniu R. W tym układzie punkt, który leży na prostej stycznej do okręgu i któryw chwili $t = 0$ miał w układzie kartezjańskim współrzędne (R, y_A), ma (w dowolnej chwili czasu t) współrzędne $x' = 0$, $y' = y_A$. Jeśli prosta, na której leży punkt (przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $y_A > 0$) toczy się bez poślizgu po okręgu to punkt ten będzie się jakby przesuwał po prostej w kierunku punktu jej styczności z okręgiem z prędkością liniową ωR. Zatem z taką właśnie prędkością przesuwa się on w układzie $x'y'$. Stąd, w układzie kartezjańskim jego współrzędnymi będą

$$\begin{aligned} x &= R\cos\omega t - (y_A - \omega R\, t)\sin\omega t \ , \\ y &= R\sin\omega t + (y_A - \omega R\, t)\cos\omega t \ . \end{aligned}$$