Zadania z mechaniki dla nano-studentów. Seria 1.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1
Nad punktem P na ziemi z samolotu lecącego na stałej wysokości H z prędkością $\mathbf{v}_1$ wyskoczył spadochroniarz i otworzył spadochron po czasie t_1, zaś na ziemi wylądował po czasie t_2 (od wyskoczenia). Zakładając, że od otwarcia spadochronu leciał on ze stałą prędkością $\mathbf{v}_2$ znaleźć:
1) prędkość samolotu względem skoczka w funkcji czasu
2) odległość samolot-skoczek w funkcji czasu
3) ruch skoczka względem punktu P.
(Wszystkie te wielkości wygodnie jest przedstawić graficznie).

Zadanie 2
Ruch punktu po płaszczyźnie zadany jest wzorami

$$\begin{aligned} x &= at\cos\omega t\ , \\ y &= at\sin\omega t\ . \end{aligned}$$

Znaleźć we współrzędnych *biegunowych* (r, φ):
1) Wzory zadające ruch,
2) równanie toru, po którym porusza się punkt
3) składowe radialną i transwersalną wektorów prędkości ($\mathbf{v}$) i przyspieszenia ($\mathbf{a}$),
4) $|\mathbf{v}|$ oraz $|\mathbf{a}|$.

Zadanie 3
Dane są cztery wektory $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{D}$.
Wyrazić liczbę

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})$$

przez same iloczyny skalarne tych wektorów.
Przedstawić wektor

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})$$

w postaci kombinacji liniowej wyrażeń, z których każde zawiera tylko jeden iloczyn wektorowy ($\times$).

Rozwiązanie zadania 2

Przejście do zmiennych biegunowych:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} = at \ , \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \omega t \ . \end{aligned}$$

Te wzory, $r(t) = at$ i $\varphi = \omega t$, zadają ruch we współrzędnych biegunowych. Równanie toru w tych zmiennych (jak i w każdych innych) uzyskujemy eliminując czas:

$$r(\varphi) = \frac{a}{\omega}\,\varphi \ .$$

Składowe radialna v_r i transwersalna v_φ wektora prędkości $\mathbf{v}$ są dane przez

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = a \ , \\ v_\varphi &= r\dot{\varphi} = a\omega t \ , \end{aligned}$$

zaś odpowiednie składowe radialna a_r i transwersalna a_φ wektora przyspieszenia mają postać

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\dot{\varphi}^2 = -a\omega^2 t \ , \\ a_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2a\omega \ . \end{aligned}$$

Długości wektorów prędkości i przyspieszenia można obliczyć zarówno w układzie biegunowym jak i kartezjańskim:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = a\sqrt{1+\omega^2 t^2} \ , \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2+\dot{v}_y^2} = a\omega\sqrt{4+\omega^2 t^2} \ . \end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania 3

Stosując zapis wskaźnikowy mamy

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \epsilon_{ijk}\, A^j\, B^k\, \epsilon_{ilr}\, C^l\, D^r \ .$$

Ponieważ $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilr} = \delta_{jl}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kl}$ zatem

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) &= (\delta_{jl}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kl})\, A^j\, B^k\, C^l\, D^r \\ &= A^j\, B^k\, C^j\, D^k - A^j\, B^k\, C^k\, D^j = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \ . \end{aligned}$$

W drugim przykładzie mamy

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) &= \mathbf{e}_i\epsilon_{ijk}(\epsilon_{jlm}A^l B^m)(\epsilon_{krn}C^r D^n) \\ &= \mathbf{e}_i\epsilon_{jlm}\,(\delta_{in}\delta_{jr} - \delta_{ir}\delta_{jn})\, A^l B^m C^r D^n \\ &= \mathbf{C}\,[\mathbf{D}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})] - \mathbf{D}\,[\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})] \\ &= -\mathbf{A}\,[\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})] + \mathbf{B}\,[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})] \ . \end{aligned}$$

Druga postać wynika z równości $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = -(\mathbf{C}\times\mathbf{D})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.