

Zadania z mechaniki dla nanostudentów. Seria 8.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1

Posługując się równaniami Lagrange'a IIgo rodzaju napisać równania ruchu punktu materialnego o masie m pozostającego stale na paraboloidzie obrotowej, której oś symetrii jest równoległa do ziemskiego pola ciężenia \mathbf{g} . Sprowadzić rozwiązanie zagadnienia do "kwadratur", tj. do jednej całki i przedyskutować ruch jakościowo wykorzystując pojęcie potencjału efektywnego.

Zadanie 2

Koralik o masie m porusza się po okręgu o promieniu R , którego jedna ze średnic jest równoległa do ziemskiego pola ciężenia \mathbf{g} . Dodatkowo okrąg ten obraca się wokół tejże średnicy z prędkością kątową ω . Posługując się równaniami Lagrange'a IIgo rodzaju napisać równanie ruchu koralika. Znaleźć jego położenia równowagi i przedyskutować ich charakter (położenie równowagi trwałej lub nietrwałej) w zależności od wartości prędkości kątowej ω . W przypadku położenia równowagi trwałej znaleźć częstości małych drgań koralika wokół niego.

Zadanie 3

Po okręgu o promieniu R mogą bez tarcia poruszać się trzy kulki o masach m . Są one połączone sprężynkami o długości swobodnej $\frac{2}{3}\pi R$ i współczynnika sprężystości k każda. Sprężynki są naciągnięte na okrąg. Znaleźć ogólny ruch tego układu. Podać przykład warunków początkowych (tj. przykładowe położenia i prędkości kulek w chwili $t = 0$), dla których wzbudzony zostaje tylko mod drgań o niższej częstości.

Uwaga. Łatwo widać, że jednym z możliwych ruchów układu jest jednostajny ruch wszystkich kulek po okręgu z taką samą prędkością, bez napinania sprężynek. Taki mod odpowiada zerowej częstości drgań; odpowiadającą mu część w ogólnym rozwiązaniu dla ruchu układu powinno być łatwo wypisać.