

Zadania z mechaniki dla nanostudentów. Seria 6.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1

Na stole leży sznur o całkowitej długości l . Początkowo $1/4$ jego długości zwisa z krawędzi stołu pionowo w dół. Współczynnik tarcia sznura o powierzchnię stołu wynosi f . Po jakim czasie sznur zsunie się całkowicie ze stołu?

Zadanie 2

Punkt materialny o masie m zsuwa się w polu grawitacyjnym g mającym kierunek osi z po paraboli opisanej wzorem $z^2 = ax$ (ruch jest płaski). Zakładając, że ruch zaczął się z wysokości $z = h$, na której prędkość punktu była równa zeru, znaleźć siłę reakcji w funkcji położenia i równanie wyznaczające miejsce, w którym punkt oderwie się od paraboli.

Wskazówka: Pamiętać, że siła reakcji nie wykonuje pracy, w związku z czym energia mechaniczna jest podczas ruchu stała.

Zadanie 3

Dwa punkty o masach m_1 i m_2 pozostają stale na paraboli $z = \frac{1}{2}ax^2$ w polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ (oś z jest skierowana w dół). Posługując się zasadą d'Alemberta napisać równania wyznaczające położenia równowagi tych mas, jeśli odległość między nimi (liczona po paraboli) pozostaje stała i równa l .

Wskazówka: Ponieważ odległość między masami liczona po paraboli jest stała wygodnie jest wyrazić wirtualne przesunięcia mas przez δs_i czyli zmianę odległości (liczonej po paraboli) masy m_i od początku układu (parametryzacja długością łuku!).

Rozwiązanie zadania 1

Mamy równanie paraboli $z^2 - ax = 0$ oraz równania Newtona

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\lambda a , \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -mg + 2\lambda z . \end{aligned}$$

Dwukrotne zróżniczkowanie równania paraboli po czasie daje

$$2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2z \frac{d^2 z}{dt^2} - a \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 .$$

Drugie pochodne można wziąć bezpośrednio z równań Newtona. Aby wyznaczyć $\dot{y}$ korzystamy z zachowania energii: mnożymy pierwsze równanie Newtona przez $\dot{x}$, drugie przez $\dot{z}$ i zapisujemy je w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) &= -\lambda a \dot{x} , \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right) &= \frac{d}{dt} (-mgz) + 2\lambda z \dot{z} . \end{aligned}$$

Dodajemy je do siebie i mamy

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgz \right] = 0 ,$$

ponieważ $-\lambda a \dot{x} + 2\lambda z \dot{z} = \lambda \frac{d}{dt} (z^2 - ax) = 0$. Uwzględniając warunki początkowe $E_{\text{tot}} = mgh$ mamy

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg(z - h) = 0 .$$

Eliminujemy stąd $\dot{x}$ korzystając z raz zróżniczkowanego równania paraboli: $\dot{x} = 2z\dot{z}$ i mamy, że

$$\dot{z}^2 = \frac{2g(h - z)}{1 + (2z/a)^2} .$$

Mamy już wszystko do wstawienia do dwukrotnie zróżniczkowanego równania paraboli:

$$2 \frac{2g(h - z)}{1 + (2z/a)^2} + 2z \left(-g + 2\frac{\lambda}{m} z \right) + \frac{\lambda}{m} a^2 = 0 .$$

Punkt odrywa się, gdy $\lambda = 0$, czyli gdy spełniony jest związek

$$2h - 3z - \frac{4}{a^2} z^3 = 0 .$$