Zadania z mechaniki dla nanostudentów. Seria 10.
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1

Pokazać, że w przypadku cząstki poruszającej się w potencjale

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \ , \qquad \alpha > 0 \ ,$$

stały jest wektor Lenza

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \ ,$$

(tzn. $\mathbf{A}$ jest stałą ruchu). Obliczając iloczyn skalarny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ znaleźć tor ruchu w postaci

$$r(\varphi) = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos\varphi} \ ,$$

gdzie φ jest kątem pomiędzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{r}$. Wyrazić stałe p i ε przez długości wektorów $\mathbf{A}$ i $\mathbf{L}$.

Zadanie 2

Znaleźć tensor momentu bezwładności I_{ij} jednorodnego prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ i masie M w układzie współrzędnych zaczepionym w jednym z wierzchołków prostopadłościanu i o osiach równoległych do jego krawędzi. Wynik uzyskać przez bezpośrednie całkowanie oraz stosując twierdzenie Steinera do tensora $I_{ij}^{(\mathrm{CMS})}$ obliczonego względem punktu będącego środkiem masy prostopadłościanu. Sprawdzić, że moment bezwładności $\mathbf{i} \cdot \hat{I} \cdot \mathbf{i} \equiv i_i I_{ij} i_j$ względem osi zadanej jednostkowym wersorem $\mathbf{i} = i_1 \mathbf{e_x} + i_2 \mathbf{e_y} + i_3 \mathbf{e_z}$ przechodzącej przez dwa przeciwległe wierzchołki i przez środek masy prostopadłościanu jest taki sam jak $\mathbf{i} \cdot \hat{I}^{(\mathrm{CMS})} \cdot \mathbf{i}$.

Zadanie 3

Cienki jednorodny pręt o masie m i długości l wiruje z prędkością kątową ω w polu ciężkości $\mathbf{g}$ wokół nieruchomej pionowej osi (równoległej do $\mathbf{g}$) przechodzącej przez jego koniec. Znaleźć kąt φ odchylenia pręta od pionu i siłę reakcji przyłożoną do pręta na jego końcu, przez który przechodzi oś obrotu.