Mechanika i STW: Drugie kolokwium

Zadanie 1 (4 pkt.) Cztery punkty materialne o jednakowych masach m mają współrzędne zadane wektorami:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Znaleźć wektor $\mathbf{r}^{(CM)}$ środka masy układu oraz położenia mas w układzie współrzędnych związanym ze środkiem masy $\mathbf{r}'^{(i)}$ dane przez:

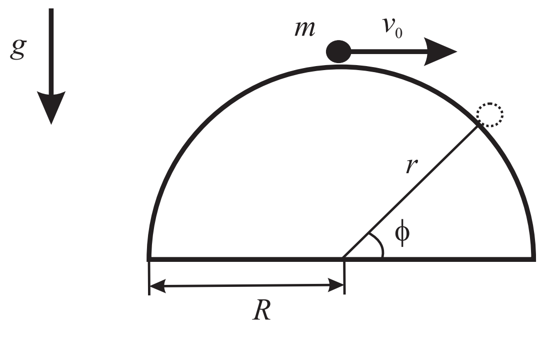
$$\mathbf{r}^{(CM)} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}^{(i)}}{\sum_i m_i}, \qquad \mathbf{r}'^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}^{(CM)}.$$

b) Obliczyć elementy tensora momentu bezwładności w układzie związanym ze środkiem masy, dane przez:

$$I_{kl}^{(CM)} = \sum_i m_i [(\mathbf{r}'^{(i)})^2 \delta_{kl} - r'^{(i)}_k r'^{(i)}_l]$$

c) Ile wynosi moment bezwładności układu względem osi położonej w płaszczyźnie $z = 0$ oryginalnego układu współrzędnych i nachylonej pod kątem α względem osi x?

Zadanie 2 (8 pkt.) Na szczycie leżącego poziomo nieruchomego półwalca o promieniu R, umieszczonego w jednorodnym polu grawitacyjnym o pionowym przyspieszeniu ziemskim g znajduje się punkt materialny o masie m, poruszający się w płaszczyźnie prostopadłej do osi półwalca. Punkt ma początkowo nadaną prędkość v_0 styczną do powierzchni półwalca.



a) W biegunowym układzie współrzędnych (r, ϕ) związanym z walcem napisać równanie więzów $f(r, \phi) = 0$ obowiązujące, gdy punkt pozostaje na powierzchni walca.

b) Podać równanie ruchu dla radialnej i transwersalnej składowej przyspieszenia, danych przez

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2, \qquad a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}$$

z uwzględnieniem siły reakcji więzów $\mathbf{F}_R = \lambda \nabla f$, gdzie λ jest mnożnikiem Lagrange'a.
Wskazówka: w biegunowym układzie współrzędnych $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$.

c) Pokazać, że całkowita energia punktu materialnego pozostającego na powierzchni walca, dana wzorem

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\phi}^2 + mg \sin\phi$$

jest zachowana w czasie, różniczkując po czasie powyższe wyrażenie i korzystając z równań ruchu.

d) Wykorzystując zachowanie energii znaleźć kąt, dla którego punkt materialny oderwie się od powierzchni walca, odpowiadający zerowaniu się siły reakcji więzów. Ile wynosi wartość tego kąta dla $v_0 \to 0$?

Zadanie 3 (10 pkt.) Klocek o masie M, przymocowany do sprężyny o stałej sprężystości k i zerowej długości swobodonej, może poruszać się w ustalonym poziomym kierunku. Do klocka przymocowana jest na nieważkim pręcie o długości l masa m, która może wahać się w pionowej płaszczyźnie zawierającej kierunek ruchu klocka. Całość umieszczona jest w jednorodnym polu grawitacyjnym scharakteryzowanym przyspieszeniem g.

a) Używając współrzędnych uogólnionych wychylenia klocka z położenia równowagi x i kąta α odchylenia pręta od pionu napisać lagranżjan układu będący różnicą energii kinetycznej i potencjalnej. Znaleźć położenie równowagi trwałej układu. Dokonać przybliżenia małych drgań, tak by lagranżjan zawierał wyrażenia co najwyżej kwadratowe we współrzędnych i prędkościach uogólnionych.

b) Wypisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju mające ogólną postać

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$$

a następnie znaleźć jawne wyrażenia na przyspieszenia $\ddot{x}$ oraz $\ddot{\alpha}$.

c) Znaleźć drgania własne (częstości własne i wektory własne) układu zakładając rozwiązanie w postaci

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix} = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} A_1 l \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Uwaga: zapisanie amplitudy drgań zmiennej $x(t)$ w postaci $A_1 l$, gdzie l jest długością pręta upraszcza postać ostatecznych wzorów.

d) Jakie są częstości własne drgań układu, gdy stosunek mas m/M dąży do zera? Dla tego przypadku granicznego znaleźć amplitudy drgań A_1 oraz A_2 w sytuacji, gdy $k/M \neq g/l$.

Zadanie 4 (8 pkt.) Koralik o masie m porusza się po okręgu o promieniu R, którego jedna ze średnic jest równoległa do ziemskiego pola ciążenia $\mathbf{g}$. Dodatkowo okrąg ten obraca się wokół tejże średnicy z prędkością kątową ω. Posługując się równaniami Lagrange'a IIgo rodzaju napisać równanie ruchu koralika. Znaleźć jego położenia równowagi i przedyskutować ich charakter (położenie równowagi trwałej lub nietrwałej) w zależności od wartości prędkości kątowej ω. W przypadku położenia równowagi trwałej znaleźć częstości małych drgań koralika wokół niego.

Mechanika i STW: Drugie kolokwium

Zadanie 1.

a)

$$\mathbf{r}^{(CM)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b)

$$I^{(CM)} = \frac{8m}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Moment bezwladności względem dowolnej osi przechodzącej przez środek masy układu wynosi $\frac{8m}{3}$. Zatem z twierdzenia Steinera:

$$I = \frac{8m}{3} + 4m\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{28}{9}m$$

Zadanie 2.

a) $f(r, \phi) = r - R$.

b) $\mathbf{F}_R = \lambda \boldsymbol{\nabla} f = \lambda \mathbf{e}_r$. Stąd:

$$ma_r = -mg\sin\phi + \lambda, \qquad ma_\phi = -mg\cos\phi.$$

c) Na powierzchni walca $a_\phi = R\ddot{\phi}$. Różniczkując E dostajemy:

$$\frac{dE}{dt} = mR^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + mgR\dot{\phi}\cos\phi = R\dot{\phi}\left(mR\ddot{\phi} + mg\cos\phi\right) \tag{1}$$

a wielkość w nawiasie znika dzieki równaniu ruchu dla a_ϕ.

d) Z równania ruchu dla współrzędnej radialnej mamy: $-mR\dot{\phi}^2 = -mg\sin\phi + \lambda$. Ale $m\dot{\phi}^2 = 2(E - mgR\sin\phi)/R^2$, więc warunek na znikanie siły reakcji więzów $\lambda = 0$ daje: $3mgR\sin\phi = 2E$. Ponieważ początkowo $E = mv_0^2/2 + mgR$ ostatecznie otrzymujemy:

$$\sin\phi = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3}.$$

Dla $v_0 \to 0$ kąt oderwania $\phi = \arcsin\frac{2}{3}$.

Zadanie 3.

a) Pełny lagranżjan:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\alpha.$$

Położenie równowagi $x = \alpha = 0$. W przybliżeniu małych drgań:

$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right).$$

b) Równania Lagrange'a:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\alpha} + kx = 0, \qquad ml^2\ddot{\alpha} + ml\ddot{x} + mgl\alpha = 0.$$

Przyspieszenia:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{M}x + \frac{m}{M}g\alpha, \qquad \ddot{\alpha} = -\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}\alpha + \frac{k}{Ml}x$$

c) Wprowadźmy oznaczenia: $\omega_s = \sqrt{k/M}$, $\omega_g = \sqrt{g/l}$, $\mu = m/M$. Założenie rozwiązania jak w treści zadania daje równanie macierzowe:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_s^2 & \mu\omega_g^2 \\ \omega_s^2 & \omega^2 - (1+\mu)\omega_g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Z warunku zerowania wyznacznika otrzymujemy:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_s^2 + (1+\mu)\omega_g^2 \pm \sqrt{[\omega_s^2 + (1+\mu)\omega_g^2]^2 - 4\omega_s^2\omega_g^2}\right)$$

Łatwo widać, że w granicy $\mu \to 0$ częstości własne są dane po prostu przez ω_s oraz ω_g. Znormalizowane wektory własne odpowiadające tym częstościom można wybrać jako:

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega_g^2)^2 + \omega_s^4}} \begin{pmatrix} \omega_s^2 - \omega_g^2 \\ -\omega_s^2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie zadania 4 z kolokwium

W układzie inercjalnym, którego osią z jest oś wokół której wiruje obręcz, a osie x i y są prostopadłe do kierunku pola ciążenia $\mathbf{g}$ wygodnie jest wprowadzić współrzędne sferyczne (r, θ, φ). Położenie koralika na obręczy jest wtedy zadane przez podanie kąta θ (czyli rozwiązaniem problemu ruchu jest podanie $\theta(t)$, bo kąt φ zmienia się w zadany sposób, tj. $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. Prędkość koralika w układzie inercjalnym ma dwie składowe

$$\begin{aligned} v_\theta &= R\dot{\theta} \\ v_\varphi &= R\omega \sin\theta \ , \end{aligned}$$

(promień okręgu po którym koralik okrąża oś obrotu obręczy przy ustalonym kącie θ wynosi $R\sin\theta$). Lagrangian układu ma więc postać

$$L = \frac{1}{2} mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mgR\cos\theta \ .$$

Daje on równanie ruchu

$$mR^2 \frac{d^2}{dt^2}\theta = mgR\sin\theta + mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta \ .$$

W przybliżeniu małych drgań rozwijamy prawą stronę w szereg Taylora wokół takiego punktu θ_0, dla którego prawa strona równania ruchu równa się zeru:

$$\left(\frac{g}{R} + \omega^2\cos\theta_0\right)\sin\theta_0 = 0 \ .$$

Warunek ten ma rozwiązania $\theta_0 = 0$, $\theta_0 = \pi$ oraz

$$\cos\theta_0 = -\frac{g}{R\omega^2} \ , \qquad \text{gdy} \quad g < R\omega^2 \ .$$

Powstawanie tego trzeciego położenia równowagi można zrozumieć porównując dla dowolnego położenia θ koralika rzuty siły ciężkości mg (skierowanej pionowo w dĺ) i siły odśrodkowej $m\omega^2 R\sin\theta$ skierowanej poziomo (w kierunku od osi obręczy) na prostą styczną do obręczy w punkcie scharakteryzowanym kątem θ: rzut pierwszej z tych sił wynosi $mg\sin\theta$, a drugiej $m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta$ i są one skierowane przeciwnie (składowe tych sił na kierunek normalny do obręczy są równoważone przez siłę reakcji obręczy). Widać, że przy odpowiednio dużej prędkości kątowej ω możliwe jest wzajemne równoważenie się tych sił (ich niezrównoważenie powoduje właśnie ruch koralika po obręczy).

Trwałość tych położeń równowagi ustalamy sprawdzając znak wyrazu liniowego w odchyleniu $\theta - \theta_0$ w prawej stronie równania ruchu:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta - \theta_0) = 0 + \left[\left(\frac{g}{R} + \omega^2\cos\theta_0\right)\cos\theta_0 - \omega^2\sin^2\theta_0\right](\theta - \theta_0) + \dots$$

Dla $\theta_0 = 0$ wyraz w nawiasie kwadratowym jest dodatni - małe wychylenie spowoduje dalsze narastanie wychylenia zgodnie z równaniem

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = \left(\frac{g}{R} + \omega^2\right)\theta \ .$$

$\theta_0 = 0$ odpowiada oczywiście położeniu koralika na samej górze obręczy: Po wychyleniu w z tego położenia koralik bedzie "ściągany" zarówno przez siłę ciężkości jak i siłę odśrodkową (co łatwi zobaczyć rysując sobie te siły).

Dla $\theta_0 = \pi$, czyli dla położenia koralika na samym "dnie" obręczy[1] mamy równanie

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta - \pi) = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)(\theta - \pi) + \dots$$

Dopóki $g > R\omega^2$, tj. dopóki szybkość wirowania obręczy nie jest zbyt duża, położenie $\theta_0 = \pi$ jest trwałym. Częstość Ω małych drgań wokół tego położenia wynosi oczywiście

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2} \ ,$$

Bo rozwiązanie równania ruchu ma postać

$$\theta(t) = \pi + A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \ .$$

(A i B są dowolnymi stałymi zależnymi od warunków początkowych).

Wreszcie, gdy $g < R\omega^2$, trwałym staje się położenie równowagi z $\cos\theta_0 = -g/R\omega^2$ (a położenie $\theta = \pi$ staje się wtedy nietrwałe)

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(\theta - \theta_0) &= \left[\frac{g}{R}\cos\theta_0 + 2\omega^2\cos\theta_0 - \omega^2\right](\theta - \theta_0) \\ &= -\omega^2\left[1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2\right](\theta - \theta_0) \ ,\end{aligned}$$

Rozwiązanie jest postaci takiej jak wyżej z $\pi \to \arccos(-g/R\omega^2)$ i częstością Ω równą

$$\Omega = \omega\sqrt{1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2} \ .$$

[1] Oczywiście realistycznie położenia $\theta_0 = 0, \pi$ nie dają się zrealizować, przynajmniej w prostym mechanicznym modelu takiego układu: oś musi przecież którędyś przechodzić!