Pierwsze kolokwium z Mechaniki i Przyległości dla nanostudentów
(wykład prof. J. Majewskiego)

Zadanie 1
Dane są cztery wektory $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{D}$. Wyrazić liczbę

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \ ,$$

przez same iloczyny skalarne tych wektorów.

Zadanie 2
Punkt materialny o masie m porusza się ruchem jednostajnym, tj. ze stałą wartością prędkości $|\mathbf{v}|$ po okręgu o promieniu R (okrąg położony jest horyzontalnie). Na punkt ten działa siła oporu $\mathbf{F}_{\mathrm{op}} = -\kappa\mathbf{v}$ oraz inna zewnętrzna siła $\mathbf{F}$ pozwalająca punktowi utrzymywać stałą prędkość. Znaleźć pracę jaką wykonuje siła oporu $\mathbf{F}_{\mathrm{op}}$ podczas jednego obiegu punktu wokół okręgu. Jaką pracę wykonuje wtedy siła zewnętrzna $\mathbf{F}$?

Zadanie 3
Korzystając z przybliżonego wzoru

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\mathbf{g}\, t^2 - \boldsymbol{\omega}\, t \times \left(\mathbf{v}_0\, t + \frac{1}{3}\,\mathbf{g}\, t^2\right) \ ,$$

w którym $\boldsymbol{\omega}$ jest wektorem prędkości kątowej obrotu Ziemi, a $\mathbf{g}$ polem ciążenia, napisać *explicite* wzory na zależność od czasu składowych wektora położenia dla rzutu ukośnego pod kątem α do poziomu w kierunku na Wschód (tj. w sytuacji, gdy składowa równoległa do Ziemi prędkości początkowej skierowana jest dokładnie wzdłuż równoleżnika) w punkcie o szerokości geograficznej φ na obracającej się Ziemi. Znaleźć różnicę zasięgów (tj. odległości punktu upadku od punktu wyrzucenia) takiego rzutu na obracającej się i nieobracającej się Ziemi (tj. poprawkę do zasięgu spowodowaną siłą Coriolisa). Czy można tak dobrać kąt α, by siła Coriolisa nie spowodowała zmiany zasięgu?
Uwaga: Uwzględniać tylko wyrazy liniowe w prędkości kątowej obrotu Ziemi.

Zadanie 4
Punkt materialny o masie m może poruszać się bez tarcia po wewnętrznej stronie ustawionej pionowo (tj. tak, że jej średnica jest równoległa do ziemskiego pola grawitacyjnego $\mathbf{g}$) obręczy o promieniu R. Napisać równania ruchu uwzględniające siłę reakcji i znaleźć zależność tej siły od położenia punktu na obręczy, jeśli w najniższym położeniu punkt miał liniową prędkość v_0. Jaka musi być minimalna prędkość v_0 aby punkt nigdy nie oderwał się od toru (zakładając, że więzy są jednostronne)?
Wskazówka: Wygodniej jest pewnie użyć układu biegunowego.

Rozwiązanie Zadania 1
Stosując zapis wskaźnikowy mamy

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \epsilon_{ijk} \, A^j \, B^k \, \epsilon_{ilr} \, C^l \, D^r \ .$$

Ponieważ $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilr} = \delta_{jl}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kl}$ zatem

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\delta_{jl}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kl}) \, A^j \, B^k \, C^l \, D^r \\ &= A^j \, B^k \, C^j \, D^k - A^j \, B^k \, C^k \, D^j = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \ .\end{aligned}$$

Rozwiązanie Zadania 2
Ponieważ ruch się odbywa po okręgu, wektor prędkości $\mathbf{v}$ jest zawsze styczny do okręgu, czyli do infinitezymalnego elementu przemieszczenia $d\mathbf{r}$. W ogólnym wzorze na pracę siły $\mathbf{F}$ mamy więc

$$dW = \mathbf{F}_{\rm op} \cdot d\mathbf{r} = -\kappa \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\kappa |\mathbf{v}||d\mathbf{r}| = -\kappa |\mathbf{v}| dl \ ,$$

gdzie dl jest długością elementu $d\mathbf{r}$. Całka po obiegu okręgu daje zatem

$$\oint dW = -\kappa |\mathbf{v}| \oint dl = -2\pi\kappa |\mathbf{v}| R \ .$$

Praca siły wymuszającej ruch jednostajny musi być równa tejże co do wartości, lecz przeciwnego znaku, bo *per saldo* energia mechaniczna punktu pozostaje stała.

Rozwiązanie Zadania 3
Powiedzmy, że wybierzemy oś z nieinercjalnego układu przyczepionego do Ziemi w punkcie rzutu prosto "w niebo", a jego oś x na południe (wtedy - bo układ musi być prawoskrętny, żeby działały wzory z iloczynami wektorowymi - oś y musi być na Wschód). W takim układzie

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} \ , \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \ .$$

Potrzebne iloczyny wektorowe:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} = \omega \, g \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\omega \, g \, \cos\varphi \; \mathbf{e}_y \ ,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 = v_0 \, \omega &\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} \\ &= -v_0 \, \omega \left(\sin\varphi \cos\alpha \; \mathbf{e}_x - \cos\varphi \sin\alpha \; \mathbf{e}_y + \cos\varphi \cos\alpha \; \mathbf{e}_z \right) \ .\end{aligned}$$

Zatem korzystając z podanego wzoru możemy napisać rozwiązanie równanń ruchu w postaci

$$\mathbf{r}(t) = v_0\, t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\, g\, t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_0\, \omega\, t^2 \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\alpha \\ -\cos\varphi\sin\alpha \\ \cos\varphi\cos\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\, g\, \omega\, t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Teraz można zacząć stąd wydobywać informacje. Po pierwsze czas trwania ruchu: od $z(0) = 0$ do $z(T) = 0$. Równanie

$$0 = z(T) = v_0\, T\, \sin\alpha - \left(\frac{1}{2}\, g - v_0\, \omega\, \cos\varphi\cos\alpha\right) T^2 ,$$

daje $T = 0$, co jest początkiem rzutu, oraz

$$T = \frac{2\, v_0\, \sin\alpha}{g - 2\, v_0\, \omega\, \cos\varphi\cos\alpha} \approx \frac{2\, v_0\, \sin\alpha}{g}\left(1 + \frac{2\, v_0\, \omega}{g}\, \cos\varphi\cos\alpha + \ldots\right) \equiv T_0 + \Delta T .$$

Pierwszy wyraz jest czasem trwania ruchu, na nieobracającej się Ziemi.

Teraz znajdujemy y-ową współrzędną $y(T)$ punktu upadku.

$$y(T) = v_0\, T\, \cos\alpha - v_0\, \omega\, T^2\, \cos\varphi\sin\alpha + \frac{1}{3}\, g\, \omega\, T^3 \cos\varphi = Y_0 + \Delta Y ,$$

gdzie $Y_0 \equiv y(T_0, \omega = 0)$, a ΔY składa się z dwóch części: $\Delta Y = \Delta Y_1 + \Delta Y_2$, gdzie

$$\begin{aligned} \Delta Y_1 &= -v_0\, \omega\, T_0^2\, \cos\varphi\sin\alpha + \frac{1}{3}\, g\, \omega\, T_0^3 \cos\varphi , \\ \Delta Y_2 &= v_0\, \Delta T\, \cos\alpha , \end{aligned}$$

(w ΔY_1 można zastąpić T przez T_0, bo różnica jest wyższego rzędu w ω). Tak więc

$$\begin{aligned} \Delta Y_1 &= -\frac{1}{3} v_0\, \omega \left(\frac{2\, v_0}{g}\right)^2 \cos\varphi\sin^3\alpha , \\ \Delta Y_2 &= v_0\, \omega \left(\frac{2\, v_0}{g}\right)^2 \cos\varphi\cos^2\alpha\sin\alpha . \end{aligned}$$

Siła Coriolisa powoduje też pewne odchylenie w kierunku osi x (na Południe na półkuli północnej):

$$\Delta X \equiv x(T) = v_0\, \omega\, T^2\, \sin\varphi\cos\alpha ,$$

(oczywiście $X_0 \equiv 0$ - niema odchylenia w kierunku osi x na nieobracającej się Ziemi). Całkowity zasięg l jest dany przez

$$l = \sqrt{(Y_0 + \Delta Y)^2 + (\Delta X)^2} = Y_0 \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta Y}{Y_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X}{Y_0}\right)^2} \approx Y_0 + \Delta Y + \ldots ,$$

bo pozostałe wyrazy rozwinięcia są wyższego rzędu w ω. Zatem $\Delta l \approx \Delta Y$:

$$\Delta l = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 = v_0\, \omega \left(\frac{2\, v_0}{g}\right)^2 \cos\varphi \sin\alpha \left(\cos^2\alpha - \frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)$$
$$= v_0\, \omega \left(\frac{2\, v_0}{\sqrt{3} g}\right)^2 \cos\varphi \sin\alpha \left(4\cos^2\alpha - 1\right) \ .$$

Odchylenie się zeruje dla rzutu pod kątem $\alpha = \pi/6$.

Rozwiązanie Zadania 4

Wybierzmy układ biegunowy tak, by kąt $\varphi = 0$ odpowiadał najniższemu położeniu punktu na obręczy. Kąt φ rośnie wtedy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zagara. Pola ciążenia ma wtedy składowe

$$\mathbf{g}_r = g\, \cos\varphi \ ,$$
$$\mathbf{g}_\varphi = -g\, \sin\varphi \ .$$

Równanie więzów ma trywialną postać

$$f(r,\varphi) = r - R = 0 \ .$$

Zatem równania Newtona z uwzględnieniem siły reakcji mają postać

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = m\, g\, \cos\varphi + \lambda \ ,$$
$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] = -m\, g\, \sin\varphi \ .$$

Po uwzględnieniu więzów przybierają one postać

$$-m\, R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = m\, g\, \cos\varphi + \lambda \ ,$$
$$mR\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m\, g\, \sin\varphi \ .$$

Mamy też zasadę zachowania energii mechanicznej (bo niema tarcia)

$$\frac{1}{2}\, m\, (R\, \dot\varphi)^2 + m\, g\, R\, (1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \ .$$

Stąd

$$-m\, R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -m\,\frac{v_0^2}{R} + 2\, m\, g\, (1 - \cos\varphi) \ .$$

Wstawiając to do radialnego równania Newtona mamy

$$m\,g\,\cos\varphi + \lambda = -m\,\frac{v_0^2}{R} + 2\,m\,g\,(1-\cos\varphi)\ ,$$

czyli

$$\lambda = -m\,\frac{v_0^2}{R} + 2\,m\,g - 3\,m\,g\,\cos\varphi\ .$$

W najniższym położeniu punktu (tj. dla $\varphi = 0$) radialna składowa siły reakcji, czyli λ jest ujemna:

$$\lambda = -m\,\frac{v_0^2}{R} - m\,g\ .$$

Aby punkt się nie oderwał, λ nie może zmienić znaku (punkt oderwania jest tam, gdzie $\lambda = 0$, tj. tam, gdzie znika siła reakcji) dla żadnego kąta φ. Musi zatem być

$$-m\,\frac{v_0^2}{R} + 2\,m\,g - 3\,m\,g\,\cos\varphi < 0\ ,$$

co może być spełnione, gdy

$$v_0^2 > 5\,g\,R\ .$$

Ten sam wynik można oczywiścioe dostać z żądania, by w najwyższym punkcie toru (dla $\varphi = \pi$) siła odśrodkowa była większa niż siła ciążenia:

$$m\,\frac{v^2(\varphi=\pi)}{R} > m\,g\ .$$

Z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}\,mv^2(\varphi=\pi) + 2m\,g\,R = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2\ ,$$

znajdujemy, że

$$m\,v_0^2 - 4\,m\,g\,R > mg\ ,$$

co prowadzi do tego samego warunku na v_0, co uzyskany poprzednio.