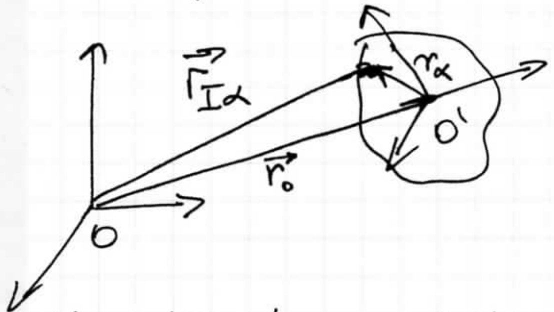
Energia kinetyczna i tensor bezwładności



$\{\vec{e}_i\}$ $i = 1, 2, 3$

U' – układ sztywno związany z ciałem sztywnym

U – układ inercjalny

$$T = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} v_{I\alpha}^2 \qquad v_{I\alpha} = \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$$

$$T = \underbrace{\frac{M}{2}\vec{v}_0^{\,2}}_{T_{raus}} + \underbrace{(\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha}_{T_\omega} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2}_{T_{rot}}$$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha = M\vec{r}_S}$$

$T_\omega = 0$ przy odpowiednim wyborze p-ktu O'

Zajmijmy się teraz energią rotacyjną $\alpha = 1, \ldots, N$

Napiszmy $\vec{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \equiv (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$

Przekształcimy wyrażenie na energię kinetyczną

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} a_l b_m =$$
$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) a_j b_k a_l b_m =$$
$$= a_j a_j b_k b_k - a_j b_j b_k a_k =$$
$$= \vec{a}^{\,2} \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$T_{rot} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{2} (\omega_i \omega_i x_{\alpha j} x_{\alpha j} - \omega_i x_{\alpha i} \omega_j x_{\alpha j}) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{2} \omega_i \omega_j (x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j})$$

Pamiętając o konwencji sumacyjnej, T_{rot} zapisujemy w postaci

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \omega_i I_{ij} \omega_j}$$

Gdzie I_{ij} (tensor bezwładności)

$$\boxed{I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j})}$$

Bardzo ważne

- I_{ij} — tensor bezwładności zdefiniowany w układzie sztywno związanym z bryłą sztywną
- ω_i $(i=1,2,3)$ — składowe wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ w układzie sztywno związanym z bryłą sztywną (czyli w układzie U')

$\vec{\omega} = \omega_i \vec{e}_i$

$$\hat{I} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -y_\alpha x_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -z_\alpha x_\alpha & -z_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Diagonalne elementy tensora ≡ momenty bezwładności

Pozadiagonalne el. tensora ≡ momenty dewiacji

Jeżeli traktujemy bryłę sztywną jako kontinuum

!

$$I_{ij} := \int \rho(x_1, x_2, x_3) \left[x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j \right] dV$$

gdzie $\rho(x_1, x_2, x_3)$ jest gęstością masy

- Tensor bezwładności jest symetryczny $I_{ij} = I_{ji}$

→ Może zostać zdiagonalizowany czyli w nowym obróconym układzie współrzędnych przyjmuje diagonalną postać

$I_{ii} = I_i$ — nazywamy głównymi momentami bezwładności

nowe kierunki — osiami głównymi tensora bezwładności

Jedna oś główna pokrywa się z osią symetrii

- Rotacyjna energia kinetyczna dla tensora względem osi głównych

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \right)$$

W zależności od liczby różnych I_i ciało sztywne nazywamy

1) Rotatorem, $I_1 = I_2$ $I_3 = 0$
2) niesymetrycznym $I_1 \neq I_2 \neq I_3$
3) symetrycznym, 2 z momentów głównych są równe
4) bąkiem kulistym, gdy $I_1 = I_2 = I_3$

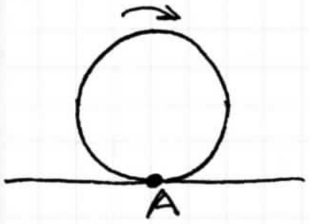
Przykład 1

Energia kinetyczna toczącego się cylindra o promieniu r

Rozważamy toczenie się bez poślizgu ze stałą prędkością kątową ω

Obliczamy energię kinetyczną walca wybierając punkt O' na 3 sposoby

(1)



Punkt $O' = A$, czyli leży w punkcie styku walca

- warunek na toczenie się bez poślizgu
  $v_A = 0$
  chwilowa oś obrotu przechodzi przez punkt A

$$T = T_{rot} = \frac{I_A}{2}\omega^2$$

I_A – moment bezwładności walca liczony w układzie U' z $O' = A$

---

(2)

Punkt $O' = S$, leży w środku masy walca

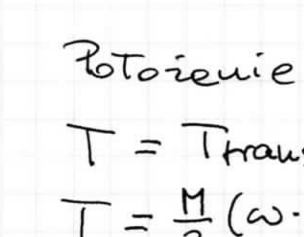
- warunek na toczenie bez poślizgu $v_S = \omega r$

$$T = \frac{M}{2}v_S^2 + \frac{I_S}{2}\omega^2 = \frac{M}{2}\omega^2 r^2 + \frac{I_S}{2}\omega^2$$

I_S – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy

---

(3)



Punkt $O' = B$ początek układu współrzędnych U' leży w najwyżej położonym punkcie cylindra

- warunek na toczenie bez poślizgu
  $v_B = \omega \cdot 2r$

Położenie środka masy $\vec{r}_{SB} = (-r, 0)$

$$T = T_{trans} + T_{\omega} + T_{rot} = \frac{M}{2}v_B^2 + (\vec{v}_B \times \vec{\omega})\cdot M\vec{r}_{BS} + \frac{I_B}{2}\omega^2$$

$$T = \frac{M}{2}(\omega\cdot 2r)^2 - 2Mr^2\omega^2 + \frac{I_B}{2}\omega^2 = \frac{I_B}{2}\omega^2$$

Uwaga: $T_{\omega} \neq 0$ ale $T_{\omega} = -\mathrm{Trans}$

Jeżeli skorzystamy z Tw. Steinera $I_d = I_S + Md^2$ (ćwiczenia)

$$I_A = I_S + Mr^2 ; \quad I_B = I_S + Mr^2 = I_A$$

$$\underline{T_{1} = T_{2} = T_{3}}$$

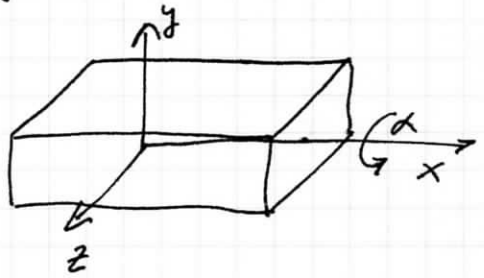
we wszystkich 3 przypadkach wyboru punktu O' otrzymujemy identyczną energię kinetyczną ciała sztywnego

Wybór O' zależy od problemu

- najczęściej mamy sytuację $O' = S$
- sposób 1) $O' = A$ stosujemy, gdy znamy położenie osi obrotu

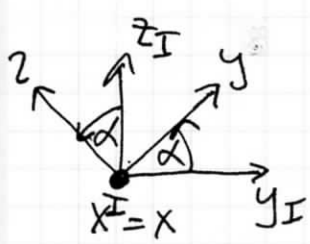
× sposób 3) b. rzadko stosowany

<u>Przykład 2</u>



Prostopadłościan o momentach bezwładności I_x, I_y, I_z obraca się względem osi głównej x z prędkością kątową $\dot{\alpha}$ i równocześnie obraca się z prędkością kątową $\dot{\beta}$ wokół pewnej stałej osi prostopadłej do osi głównej x.
Obliczyć energię obrotową.

Załóżmy, że stała oś pokrywa się w chwili początkowej z osią z.
Trudność stała oś w układzie inercjalnym.
Prędkość kątową obrotu wokół tej osi trzeba wyrazić w układzie związanym z ciałem sztywnym



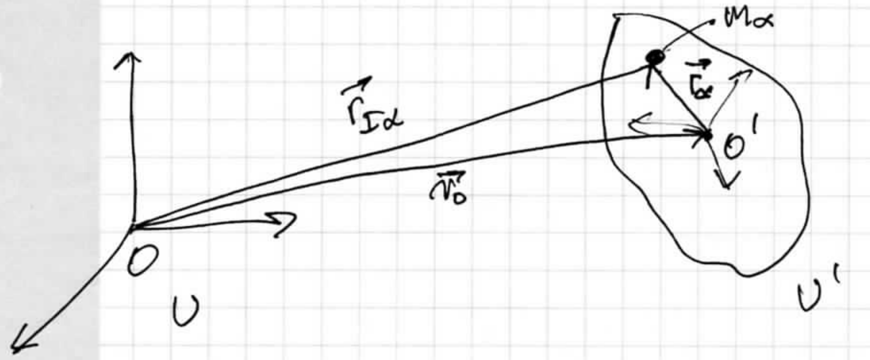
$$\vec{e}_y = \cos\alpha\, \vec{e}_{yI} + \sin\alpha\, \vec{e}_{zI}$$
$$\vec{e}_z = -\sin\alpha\, \vec{e}_{yI} + \cos\alpha\, \vec{e}_{zI}$$
$$\vec{e}_{zI} = \sin\alpha\, \vec{e}_y + \cos\alpha\, \vec{e}_z$$

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\, \vec{e}_x + \dot{\beta}\, \vec{e}_{zI} = \dot{\alpha}\, \vec{e}_x + \dot{\beta} \sin\alpha\, \vec{e}_y + \dot{\beta}\cos\alpha\, \vec{e}_z$$

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2\right)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_x \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 \left(I_y \sin^2\alpha + I_z \cos^2\alpha\right)}$$

Moment pędu ciała sztywnego



U' układ sztywno związany z ciałem sztywnym

Całkowity moment pędu

$$\vec L_{tot} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_{I\alpha} \times \vec v_{I\alpha}$$

Pamiętamy $\vec r_{I\alpha} = \vec r_0 + \vec r_\alpha$

$$\vec v_{I\alpha} = \vec v_0 + \vec\omega \times \vec r_\alpha$$

$$\vec L_{tot} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha (\vec r_0 + \vec r_\alpha) \times (\vec v_0 + \vec\omega \times \vec r_\alpha) =$$

$$= M \vec r_0 \times \vec v_0 + \vec r_0 \times \left[\vec\omega \times \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha\right)\right] + \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha\right) \times \vec v_0 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha \times (\vec\omega \times \vec r_\alpha)$$

Dość skomplikowany.
Rozpatrzymy dwa znane już przypadki

1) $O' = S$ początek układu U' w środku masy bryły sztywnej

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha = 0$$

$$\vec L_{tot} = M \vec r_S \times \vec v_S + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha \times (\vec\omega \times \vec r_\alpha)}$$

$$= \underbrace{M \vec r_S \times \vec v_S}_{\text{ORBITALNY MOMENT PĘDU}} + \underbrace{\vec L}_{\text{WŁASNY MOMENT PĘDU}}$$

2) Przynajmniej jeden punkt ciała spoczywa w U

- O' w tym punkcie $\Rightarrow \vec v_0 = 0$
- Początek układu inercjalnego U (tzn. punkt O) też w punkcie $\Rightarrow \vec r_0 = 0$

$$\vec L_{tot} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha \times (\vec\omega \times \vec r_\alpha) = \vec L$$

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \vec b\,(\vec a \cdot \vec c) - \vec c\,(\vec a \cdot \vec b)$$

$$\vec r_\alpha \times (\vec\omega \times \vec r_\alpha) = \vec\omega\, r_\alpha^2 - \vec r_\alpha\,(\vec r_\alpha \cdot \vec\omega)$$

$$I_{ij} := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[x_{\alpha k} x_{\alpha k}\, \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right]$$

$$\vec L = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha \times (\vec\omega \times \vec r_\alpha)$$

ω_j – składowe prędkości kątowej w układzie U' (sztywno związanym z bryłą sztywną)

$$\Longrightarrow L_i = I_{ij}\,\omega_j$$ ← konwencja sumacyjna

Własny moment pędu ciała sztywnego nie jest równoległy do prędkości kątowej

$\vec L$ nie jest równoległy do $\vec\omega$

Dynamika – zmiana momentu pędu

Wykłady

$$\frac{d}{dt}\vec L_{tot} = \vec N$$

$\vec L_{tot}$ – moment pędu w układzie inercjalnym

$\vec N$ – moment sił zewnętrznych w układzie inercjalnym

$$\vec N = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec r_{I\alpha} \times \vec F_\alpha^{\,ext.}$$

Jeżeli początek układu U' wybierzemy w środku masy, to jak pamiętamy mamy

$$\frac{d}{dt}\vec L_s = \vec N_s$$

$$\vec L_s = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha \times \dot{\vec r}_\alpha \qquad \vec N_s = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec r_\alpha \times \vec F_\alpha^{\,ext}$$

Początek układu sztywno związanego z ciałem wybieramy w środku masy ciała

Wtedy mamy $\vec L = \vec L_s = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec r_\alpha \times (\vec\omega \times \vec r_\alpha)$

$$\vec L_s = I_{ij}\,\omega_j\, \vec e_i$$

$\{\vec e_i\}$ wektory bazy układu sztywno związanego z ciałem sztywnym

Musimy policzyć $\frac{d}{dt}\vec{L}_s = \frac{d}{dt}(I_{ij}\omega_j \vec{e}_i)$

Pochodna w układzie inercjalnym U

w układzie inercjalnym U wektory $\vec{e}_j$ zależą od czasu

Musimy zastosować do L związek pomiędzy pochodnymi w ukł U i U'

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L}$$

$$\boxed{\frac{d'\vec{L}_s}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L}_s = \vec{N}_s} \qquad \vec{L}_s = I_{ij}\omega_j \vec{e}_i$$

I_{ij} – tensor bezwładności w układzie U' o początku S

ω_j – składowe wektora prędkości kątowej w układzie U'

$\vec{e}_i$ – wektory bazy w układzie U'

$$\frac{d'}{dt}\vec{L}_s = \frac{d'}{dt}(I_{ij}\omega_j \vec{e}_i) = I_{ij}\vec{e}_i \frac{d'\omega_j}{dt} = I_{ij}\vec{e}_i \dot{\omega}_j$$

Pamiętamy • $\frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$

• wektory $\vec{e}_i$ nie zależą od czasu w układzie U'

• s

• Jeżeli wektory bazy $\vec{e}_i$ zgodne z osiami głównymi tensora bezwładności to mamy

$L_1 = I_1\omega_1$

$L_2 = I_2\omega_2$

$L_3 = I_3\omega_3$

$$\vec{\omega}\times\vec{L}_s = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3\omega_2\omega_3 - I_2\omega_2\omega_3 \\ I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1\omega_3 \\ I_2\omega_1\omega_2 - I_1\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) &= N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) &= N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) &= N_3 \end{aligned}}$$

Równanie Eulera

$N_i,\ I_i,\ \omega_i \quad i=1,2,3$

w układzie U' (sztywno związanym z ciałem)

(2)

Równania Lagrange'a II rodzaju dla ciała sztywnego

$f = 6 - k \quad 0 \leq p \leq 6$

k – liczba więzów

$$T = \frac{M}{2}\vec{v}_0^{\,2} + (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$$

energia kinetyczna

$$T = T_{trans} + T_{\omega} + T_{rot}$$

① $O' = S \qquad T = \frac{M \vec{v}_S^{\,2}}{2} + T_{rot}$

② $v_0 = 0 \qquad T = T_{rot}$

$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j$

ω_i – składowe prędkości w układzie związanym z ciałem sztywnym

Trzeba energię kinetyczną wyrazić przy pomocy współrzędnych uogólnionych zgodnych z więzami.

Następnie wyrazić potencjał przez zmienne uogólnione

W szczególności dla ciała sztywnego swobodnego możemy wziąć

$$x_S, y_S, z_S, \underbrace{\varphi, \theta, \psi}_{\text{kąty Eulera w układzie środka masy}}$$

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \dot{z}_S^2) + T_{rot}(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$$

Energia potencjalna

$$V(x_S, y_S, z_S, \theta, \varphi, \psi) \leftarrow$$

przykład
Ruch ciała sztywnego swobodnego w jednorodnym polu grawitacyjnym

$$V = -M\vec{g} \cdot \vec{R} = Mg z_S$$

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z$$

$$\underline{\underline{L = T - V}}$$

Przykład

Więzy:

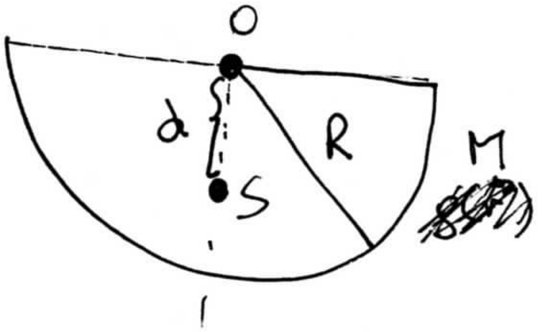
$x_0 = 0$

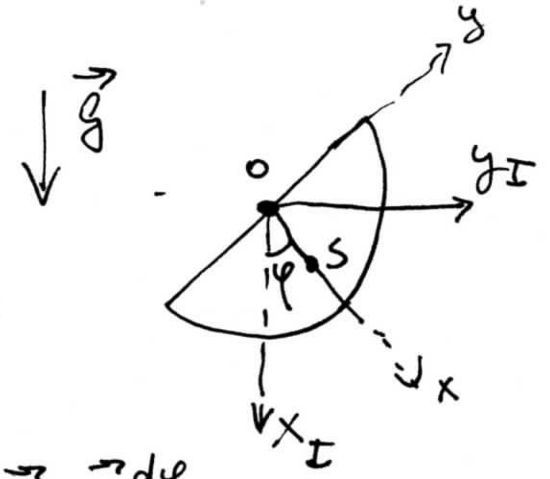
$y_0 = 0$

$z_0 = 0$

$z_I \perp x$

$z_I \perp y$





$$\omega = \dot{\varphi} \quad \leftarrow \vec{\omega} = \vec{n}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$T = \frac{1}{2} I_0 \cdot \dot{\varphi}^2 \qquad V = -mgx_I = -mgd\cos\varphi$$

$$L = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 + mgd\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgd\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_0 \dot{\varphi}$$

$$I_0 \ddot{\varphi} + mgd\sin\varphi = 0$$

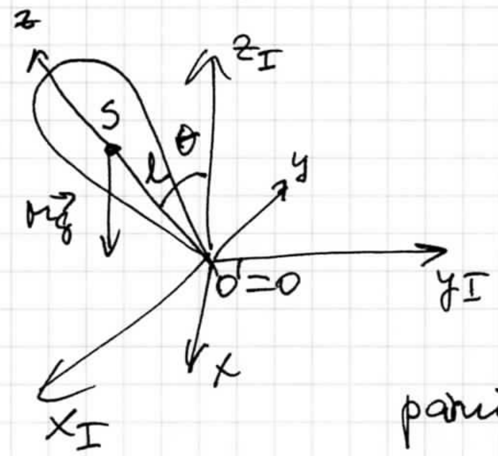
$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgd}{I_0}\sin\varphi$$

Dla małych wychyleń $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \qquad \omega^2 = \frac{mgd}{I_0}$$

$$\vec{\omega} = \vec{n}\frac{d\varphi}{dt}$$

Np. Bąk symetryczny ciężki



$$L(\varphi, \theta, \psi, \dot\varphi, \dot\theta, \dot\psi)$$

$$T_{rot} = \frac{I_1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2$$

$$V = -mgl\cos\theta$$

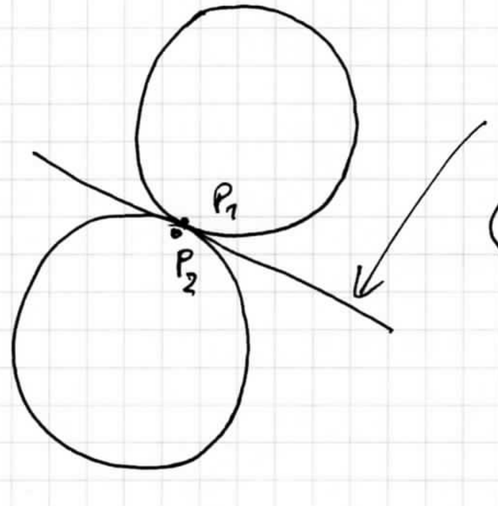
pamiętając o relacji pomiędzy ω_1, ω_2 i ω_3 a kątami Eulera

mamy

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{I_3}{2}(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgl\cos\theta$$

Dalsza dyskusja problemu na ćwiczeniach

Dwa ciała sztywne stykające się



wspólna płaszczyzna styczna

$\vec{F}_{1,2}$ – siła z jaką ciało "2" działa na ciało "1"

$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$

"Ciało 2" stwarza więzy dla "ciała 1" ciała nie przenikają się.

Opisuje to składowa normalna siły $\vec{F}_{1,2}$ $\quad \vec{F}_{R\,1,2}$

$\vec{F}_{T,1,2}$ – siła ~~r~~ równoległa do płaszczyzny stycznej siła Tarcia

$\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2$ – przesunięcia wirtualne punktów w których ciała się stykają zgodnie z więzami

Przesunięcie wirtualne punktu P_1 względem P_2

$\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2$ leży w płaszczyźnie stycznej

Praca wirtualna $\delta A = \delta\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{1,2} + \delta\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{2,1} = \vec{F}_{1,2} \cdot (\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2)$

$$\delta A = \vec{F}_{1,2,T} \cdot (\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2)$$

- Praca wirtualna sił normalnych $\vec{F}_{R1,2}$ i $\vec{F}_{R2,1}$ znika.
  Możemy więc traktować te siły jako siły reakcji więzów.

- Praca wirtualna sił tarcia w ogólności nie jest zerem
  Musimy siłę tarcia traktować jako siłę daną.

Jednak Istnieje przypadek, kiedy tarcie może być traktowane jako siła reakcji więzów !

Kiedy – Punkty P_1 i P_2 nie mogą być względem siebie przesunięte także w płaszczyźnie stycznej $\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2 = 0$

Wówczas praca wirtualna sił tarcia jest równa ~~zero~~.

Siły tarcia można w tym przypadku traktować jako siły reakcji więzów.
Więzy te nie są holonomiczne
Kładziemy $\delta \vec{r}_i = d r_i$ (MOŻNA bo WIĘZY nie zależą od CZASU) !

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} = 0 \leftarrow$$ Prędkość punktu 1 względem 2 jest zerem.

Jedno ciało wykonuje względem drugiego ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu przechodzącej przez ten punkt.

~~Tutaj~~ Toczenie bez poślizgu jednego ciała po drugim

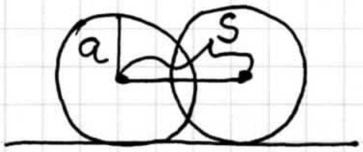
Na ogół więzy nie są holonomiczne.
Warunek na toczenie się bez poślizgu nie ogranicza położenia ciała.

Przykład dyskutowany już na wykładzie ruch obręczy (koła) po płaszczyźnie

(5)

!! Mogą w szczególnych przypadkach być holonomiczne.

Np. toczenie się bez poślizgu jednorodnego koła pozostającego w jednej płaszczyźnie



$S = \underbrace{a \cdot \alpha}_{\text{długość łuku}}$

↑ przesunięcie środka ciężkości

Podsumowanie

(1) Ciała sztywne mają 6 stopni swobody.

Ruch ciała sztywnego ≡ złożenie dwóch ruchów

a) Translacja — wszystkie punkty ciała sztywnego mają taką samą prędkość

b) rotacja (ruch obrotowy)

$$\vec{v}_I = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

(2) Energia kinetyczna

Dwa ważne przypadki a) $0' = S$ początek układu związanego z ciałem sztywnym w jego środku ciężkości

$$T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{M}{2} \vec{V}_S^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$$

b) Przynajmniej jeden punkt ciała sztywnego spoczywa w układzie inercjalnym

$$T = T_{rot}$$

(3) $T_{rot} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j$ gdzie

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha [x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}]$$

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j)$$

(4) I_{ij} - symetryczny tensor przez odpowiedni obrót osi może być sprowadzony do postaci diagonalnej

główne osie tensora

wtedy $T_{rot} = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$

(5) Moment pędu

a) $O' = S$ $\qquad \vec{L}_{tot} = m\vec{r}_s \times \vec{v}_s + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)$

$$\vec{L}_{tot} = m\vec{r}_s \times \vec{v}_s + \vec{L}$$

b) $O_I = O'$ spoczywa $\qquad \vec{L}_{tot} = \vec{L}$

(6) $L_i = I_{ij}\,\omega_j$

(7) ~~$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{N}$ gdzie $\vec{N} =$~~

$$m\ddot{\vec{r}}_s = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{ext} = \vec{F}^{ext}$$

(8) $\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{N}$, gdzie $\vec{N} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{ext}$

$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \vec{N}_s$ $\qquad$ Moment pędu i moment siły liczone względem środka ciężkości (S - może poruszać się z przyspieszeniem)

(9) $$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \underbrace{\frac{d'\vec{L}_s}{dt}}_{\frac{d'L_i}{dt} = I_{ij}\dot{\omega}_j} + \vec{\omega} \times \vec{L}_s = \vec{N}_s$$

(10) Równania Eulera

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

(11) $$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Relacje pomiędzy składowymi częstości w układzie sztywno związanym z bryłą i kątami Eulera.