

Mechanika ciała sztywnegoOkreślenie ciała sztywnego (bryły sztywnej)

Ciało sztywne = układ punktów materialnych, których wzajemne odległości są wielkościami statycznymi.

$$(*) \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = l_{ij}^2 \quad j, i = 1, 2, \dots, n$$

$$l_{ij} = \text{const}$$

Ośrodek o ciągłym rozkładzie materii - można przybliżyć przez układ punktów materialnych

Jeżeli w układzie punktów materialnych tworzących ciało sztywne nie występuje inne więzy to mamy do czynienia z ciałem sztywnym swobodnym* Ile stopni swobody f ma swobodne ciało sztywne?

$$f \stackrel{?}{=} 3n - \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\text{liczba różnych odległości pomiędzy punktami ciała}}$$

$$f < 0 \text{ już dla } n > 7$$

NIEMOŻLIWA TAKA DEFINICJA f !

ROZWIĄZANIE: NIE wszystkie odległości są niezależne

* Ile mamy niezależnych odległości?

TRUDNY PROBLEM

SPRÓBUJMY OKREŚLIĆ f inaczej

Podanie 3 punktów niewspółliniowych określa jednoznacznie położenie ciała sztywnego

OKREŚLENIE POŁOŻENIA:

1 punkt - określa położenie ciała z dokładnością do obrotów wokół osi przechodzących przez ten punkt.

dwóch punktów - określa położenie ciała z dokładnością do obrotów wokół osi przechodzących przez te 2 punkty

3 punkty niezależne na jednej prostej $\equiv$ (2)
 $\equiv$ jednorazowe określenie położenia
 ciała sztywnego
 czyli do określenia f potrzebujemy $n=3$
 $f = 3 \cdot 3 - \frac{3(3-1)}{2} = \underline{\underline{6}}$

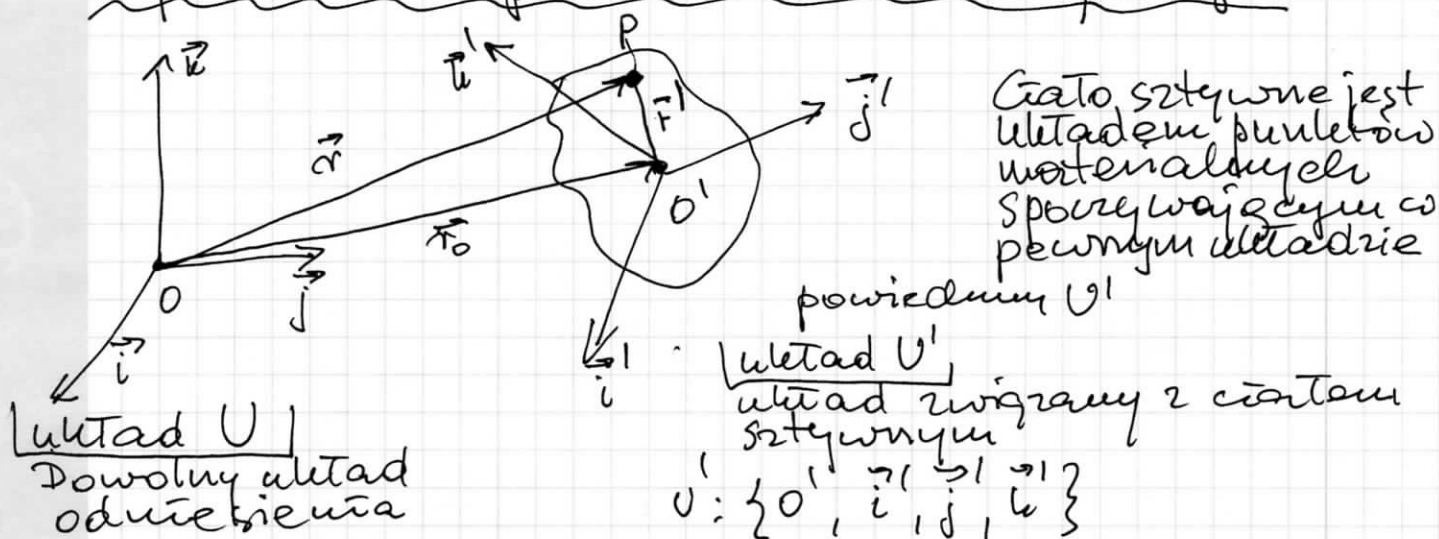
Ciało sztywne swobodne ma 6 stopni swobody

Jeżeli dodatkowo natężymy k -niezależnych od siebie i nieprzeciętych równań więzów holonomicznych dwustronnych

to $\boxed{f = 6 - k} \quad k \leq 6$

$k=0 \rightarrow$ ciało sztywne swobodne.

Wyznaczanie położenia ciała sztywnego



Położenie ciała sztywnego jest określone przez podanie $\odot$ położenia punktu O' (3 współt.)

$\odot$ kierunków wektorów i', j', k' (3 niezależne współt.)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' = \vec{r}_0 + x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}'$$

Początek układu U' , czyli punkt O' , możemy wybrać w stosowny sposób

np $\square O'$ wybieramy w środku masy ciała

$\square O'$ wybieramy w spoczywającym punkcie zależnie od problemu.

Prędkość i przyspieszenie punktów ciała sztywnego

(3)

Pamiętanie z I wykładu

$\vec{A}$ - dowolny wektor

$$(*) \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

pochodna w układzie U

Pochodna w układzie U'
(sztywno związanym z ciałem sztywnym)

$$\text{gdyż } \vec{\omega} := \vec{i}' \left(\vec{k}' \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt} \right) + \vec{j}' \left(\vec{i}' \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \vec{k}' \left(\vec{j}' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} \right)$$

↑
prędkość kątowa

Ważny punkt P ciała sztywnego

Jego wektor wodzący $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$ ($\vec{r}_0 = \vec{OO}'$)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

Zastosujmy powyższy wzór (*) dla $\vec{A} = \vec{r}'$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\frac{d'\vec{r}'}{dt} =: \vec{v}' = 0 \quad \text{dla punktów ciała sztywnego}$$

(odległości pomiędzy punktami są stałe)

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_H + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

$$\text{gdzie } \vec{v}_H = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

Prędkość punktu P ciała sztywnego względem układu U

$$\vec{v}' = 0 \Rightarrow \vec{a}' = 0$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_H + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')} \quad \text{gdzie } \vec{a}_H = \frac{d\vec{v}_H}{dt}$$

Przyspieszenie punktu P ciała sztywnego względem układu U

Energia kinetyczna i tensor bezwładności

4

Ciało sztywne składa się z N punktów materialnych

Wzruchy U układ inercjalny

$\vec{r}_{I\alpha}$ - wektor ^{położenia} punktu materialnego α w układzie inercjalnym U

$\vec{r}_\alpha$ - wektor ^{położenia} punktu materialnego α w układzie związanym z ciałem sztywnym

$\vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_s$ - prędkość środka masy G ciała sztywnego i jego prędkość w układzie inercjalnym U

$\vec{v}_0$ - jak poprzednio = prędkość punktu O' w układzie inercjalnym U

Energia kinetyczna

$$T = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} v_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} [\vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)]^2 =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{m_\alpha}{2} \vec{v}_0^2 + m_\alpha \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \right\} =$$
$$= \frac{M}{2} \vec{v}_0^2 + (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \cdot \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$$

$M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$ - masa całkowita ciała sztywnego

$$T = T_{\text{trans}} + T_w + T_{\text{rot}}$$

translacyjna energia kinetyczna

kinetyczna energia obrotu

energia kinetyczna ze składową translacyjną i obrotową

$$T_w := (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \cdot \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha$$

może być zero przez odpowiedni wybór O' (początek układu sztywno związanego z ciałem sztywnym)

① możliwość

$O' = S \leftarrow$ środek masy ciała sztywnego

$$\text{wtedy } \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0 \Rightarrow T_w = 0$$

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} \vec{v}_s^2}_{T_{\text{trans}}} + T_{\text{rot}}$$

Energia kinetyczna ciała sztywnego = energia kinetyczna środka masy + energia rotacyjna ciała względem środka ciężkości

② $T_w = 0$ również w sytuacji, gdy przynajmniej jeden z punktów ciała stałego (sztywnego) spoczywa (w układzie inercyjnym)

Wybierając O' w takim punkcie mamy

$$\vec{v}_O = 0 \Rightarrow T_w = 0 \text{ oraz } T_{\text{trans}} = 0$$

W tym wypadku $T = T_{\text{rot}}$,
tzn. że energia kinetyczna ciała sztywnego jest
równa energii obrotowej wokół spoczywającego
punktu.