

Wykład 7 & 7a (30. III & 1. IV)

7-1

Przykłady zastosowań mechaniki PROBLEM DWOCH CIAŁ.

Rozważamy układ zamknięty składający się z dwóch punktów materialnych m_1 & m_2 .

- Oddziaływanie pomiędzy dwoma punktami opisane jest potencjałem centralnym $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

Funkcja Lagrange'a dla problemu 2 ciał

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

- { Problemy, które mają charakter problemu dwóch ciał
- problem Keplera
 - klasyczny opis atomu wodoru

Z funkcji L możemy otrzymać 6 równań ruchu (równania różniczkowe II rzędu)

Wykorzystamy symetrie problemu, żeby zredukować liczbę równań.

1. Symetria względem translacji (przesunięć)
2. Symetria względem obrotów
3. Zachowanie energii (symetria względem przesunięć w czasie)

|| Bardzo ważny przykład wykorzystania symetrii dla rozwiązywania problemu.

Predstawione wyżej symetrie nie są zależne, od faktu czy układ jest traktowany klasycznie czy kwantowo-mechanicznie.

~~Analogicznie~~ Powyższe symetrie będą też wykorzystane do rozwiązywania standardowego problemu mechaniki kwantowej, problemu atomu wodoru.

Symetrie uwolnionych następujące kwadraty 7-2
prowadzące do rozwiązania problemu

1. Rozwiązanie dla ruchu środka masy. Zredukowanie problemu dwóch ciał do problemu jednego punktu
2. Rozwiązanie ruchu kątownego. Redukcja do równania radialnego.
3. Redukcja do równania 1 ciała.

Redukcja do problemu jednociałowego

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

↖ położenie środka masy

↖ względne położenie
dwóch ciał

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

→ podstawiamy do f. Lagrange'a

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \vec{R}, \dot{\vec{R}}) = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|)$$

gdzie $M = m_1 + m_2$ — całkowita masa układu

$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — tzw. masa zredukowana układu

$$\left[\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right]$$

Z Symetrii translacyjnej $\Rightarrow \vec{R}$ jest zmienną cykliczną

Odpowiadającą zmienną \vec{R} kanoniczny pęd jest stałą ruchu

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M \dot{\vec{R}} = \text{const} \Rightarrow \vec{R}(t) = \underbrace{\vec{a}}_{\text{stała}} t + \vec{b}$$

Środek ciężkości porusza się wzdłuż prostej ze stałą prędkością

Funkcja Lagrange'a nie zawiera członów sprzężających $\vec{R} \neq \dot{\vec{r}}$

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \vec{R}, \dot{\vec{R}}) = L_1(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) + L_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

Można więc ograniczyć się do L_2 czyli problemu jednowymiarowego

$$\text{Od teraz } L \equiv L_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(|\vec{r}|)$$

Redukcja do równania radialnego

Moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ jest stały ruchu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \mu(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \mu(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}})$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\text{grad } V = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{\vec{L} = \text{const}}$$

Moment pędu jest stały ruchu
(symetria względem obrotów)

Ruch w polu sił centralnych przebiega w ustalonej płaszczyźnie $\perp \vec{L}$

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$$

Pamiętajcie, że $\vec{L} = \text{const}$, możemy wybrać oś z układu inercjalnego równoległą do \vec{L}

$$\vec{e}_z \parallel \vec{L} \quad \vec{L} = |\vec{L}| \vec{e}_z$$

Stąd wynika, że tor ruchu leży w płaszczyźnie $\underline{z=0}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0$$

Wprowadzimy teraz współrzędne biegunowe w płaszczyźnie $(x, y, z=0)$, czyli (r, φ)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$L_z = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \equiv l$$

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

↑
Lagrangian daje opis ruchu dwuwymiarowego jednej cząstki

Współzmienna φ jest cykliczna

$\rightarrow p_\varphi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ jest stałą ruchu

$$p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi} \equiv L_z = \text{const} \equiv l$$

Energia układu jest zachowana

$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2}}_{V_{\text{eff}}(r)} + V(r)$$

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

Opisuje jednowymiarowy ruch wzdłuż słupkowej radialnej w efektywnym potencjale $V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$

Ogólne rozwiązanie 6 równań II rzędu ($\vec{r}_1(t)$ & $\vec{r}_2(t)$) wymaga określenia 12 stałych

$\vec{a}, \vec{b} \rightarrow$ daje 6
 $\vec{z}(t) = 0$ daje 2
 \vec{l}
 E } 2

potrzebujemy jeszcze 2
 $\varphi_0 := \varphi(t_0)$ oraz $r_0 := r(t_0)$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(r)]}$$

$\dot{r} (> 0)$ " + " cząstka oddala się od centrum

$\dot{r} (< 0)$ " - " cząstka przybliża się do centrum

Wartości r , dla których $\dot{r} = 0$

$$\rightarrow E - V_{\text{eff}}(r) = 0$$
$$V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0$$

określają punkty zwrotne ruchu radialnego.

$$(*) \quad t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V(r)] - \frac{l^2}{2\mu r'^2}}} \quad t_0 = 0$$

r zawsze wybieramy " + "
małe wybieramy " - " $\Rightarrow r(t)$

Jeżeli znaleźliśmy $r(t)$ i wstawimy do relacji

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu} \frac{1}{[r(t)]^2}$$

całkowanie z warunkiem początkowym daje $\varphi(t=0) = \varphi_0$

$$(**) \quad \varphi(t) = \frac{l}{\mu} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')} + \varphi_0$$

Dla potencjału $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (*) & (**) można scalkować analitycznie (TRUDNE!)

czasami zamiast $r(t)$ i $\varphi(t)$ znajduje się geometryczny tor ruchu, czyli $V(\varphi)$

$$\cancel{dt} = \frac{m}{l} r^2 d\varphi \quad d\varphi = \frac{l}{\mu} \frac{dt}{r^2}$$

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{eff}(r)]}}$$

$$d\varphi = \pm \frac{l}{\mu} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{eff}(r)]}}$$

$$(***) \quad \varphi(r) = \pm \frac{l}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{eff}(r)]}} + \varphi_0$$

Dla klasy potencjałów $V(r) = ar^{n+1}$ powyższa całka była intensywnie badana

Dla $n = 1, -2, -3$ całka daje funkcje elementarne

Dla $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ mamy do czynienia z funkcjami eliptycznymi

Jeżeli odwrócimy relację (***) mamy zależność $r(\varphi)$

Problem Keplera

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} = -\frac{\alpha}{r}$$

a) Policzyc dla potencjatu grawitacyjnego tor nieliniowy $r(\varphi)$

b) zbadać możliwe formy ruchu

Z równania (***)

$$\varphi(r) = \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu\alpha}{l^2 r} - \frac{1}{r^2}}}$$

Podstawienie $u := \frac{1}{r}$

$$\varphi(u) = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu\alpha}{l^2} u - u^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \begin{array}{l} \text{dla } a < 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{array}$$

$$\varphi(u) = \tilde{\varphi}_0 \mp \arccos \frac{-\frac{l^2}{\mu\alpha} u + 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0) \right]}$$

Oznaczenia

$$p := \frac{l^2}{\mu\alpha}$$

$$\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$$

$$\varphi_0 := \tilde{\varphi}_0 + \pi$$

$$\boxed{\left(\square \right) \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \left[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) \right]} \quad \text{dla } V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \alpha > 0$$

$$\text{Dla } V(r) = \frac{+\alpha}{r} \quad \alpha > 0$$

potencjal
odpychający
(np. kulki od siebie)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \left[-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) \right]$$

gdyż p i ε
zdefiniowane
jak powyżej

Ⓚ - opisuje równania tzw. krzywych stożkowych powstających z przecięcia stożka płaszczyzną

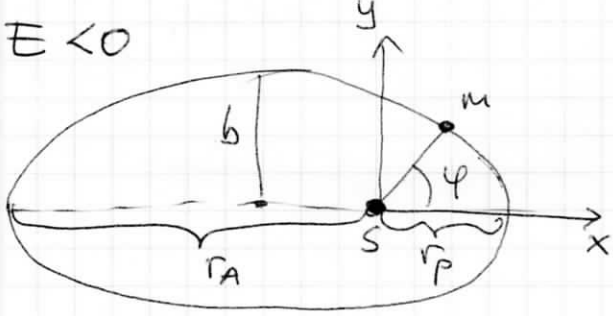
$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

$\epsilon = 0$ Okrąg
 $0 < \epsilon < 1$ Elipsa
 $\epsilon = 1$ Parabola
 $\epsilon > 1$ Hiperbola

φ_0 - oznacza punkt ton, leżący najbliżej punktu perihelium (Perihelium) punktem ultadei współrzędnych

Z zależności $\epsilon(E)$ widać

$E < 0$ $0 < \epsilon < 1$ tor jest elipsą
 $E = 0$ $\epsilon = 1$ tor jest parabolą
 $E > 0$ $\epsilon > 1$ tor jest hiperbolą



Dla tak wybranego ultadei współrzędnych $\varphi_0 = 0$

I Prawo Keplera

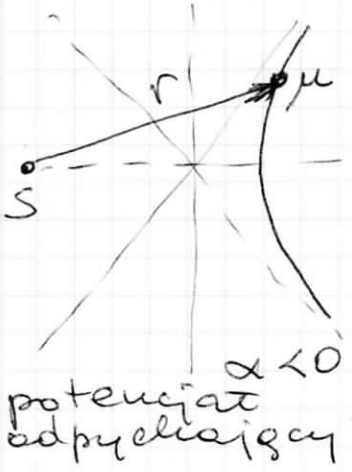
$$r_p = \frac{p}{1 + \epsilon} \quad r_A = \frac{p}{1 - \epsilon}$$

$$a = r_p + r_A = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E}$$

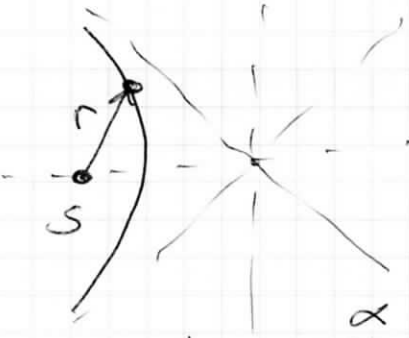
$$E = -\frac{\alpha}{2a}$$

Specjalny przypadek $\epsilon = 0 \Rightarrow r_p = r_A = p$
 promień okręgu $R = p = \frac{L^2}{\mu \alpha}$

$E > 0$ Tor hiperbolą



$\alpha < 0$
 potencjał odpychający



$\alpha > 0$
 potencjał przyciągający

Tylko jedna gałąź ma znaczenie fizyczne

Ruch w polu centralnym - Potencjał efektywny

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V(r) + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$p_{\varphi} = m r^2 \dot{\varphi}$$

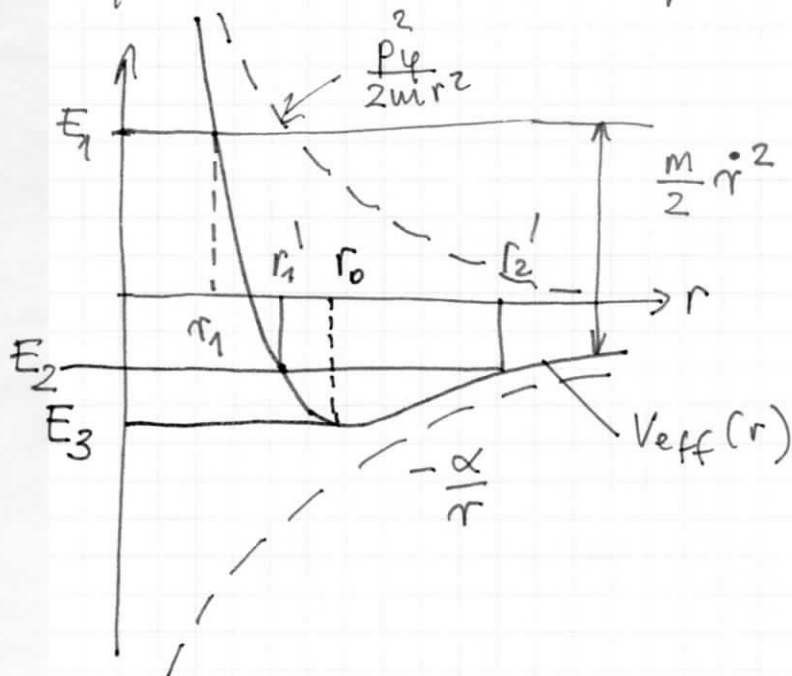
$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V(r) + \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

gdzie $V_{\text{eff}}(r) := V(r) + \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2}$ $p_{\varphi} \equiv l$

efektywny potencjał potencjał centryfugalny

Również bez konieczności całkowania równań można w jakościowy sposób opisać ruch radialny.

Przykład Problem Keplera, czyli $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$



Rozważamy 3 przypadki

(a) $E = E_1 > 0$

Cząstka zbliżająca się do centrum φ ma prędkość radialną

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r)]}$$

- w punkcie r_1 kończy się radialny ruch. cząstka zawraca i oddala się do nieskończoności. Tor jest niezamknięty i opisuje proces rozpraszania.

Obszar $r < r_1$ nie może być osiągnięty, ponieważ energia kinetyczna musi być dodatnia.

Tylko w przypadku $p_\varphi = 0$ cząstka "spada" na centrum.

⊙ ~~$E = E_3$~~ $E = E_3 = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}$

Energia całkowita jest równa minimum $V_{eff}(r)$

Energia kinetyczna $\frac{m\dot{r}^2}{2}$ jest równa zero

Ruch radialny znika. Tor jest okręgiem.

Promień tego okręgu

$$\left. \frac{dV_{eff}(r)}{dr} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha}$$

⊙ $E_3 < E = E_2 < 0$ Tor jest zamknięty (składowy) opisuje stan związany

Cząstka ~~biegnie~~ porusza się pomiędzy punktami zwrotnymi r_1' i r_2'

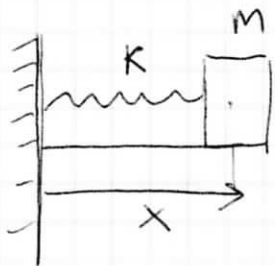
Nie można powiedzieć czy tor jest elipsą czy pętlą innej postaci.

≡ Skończoność toru vs. jego zamkniętość

Istnieją tylko dwa potencjały, dla których skończone tory są zamknięte dla wszystkich warunków początkowych.

Są to (i) $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (ii) $= \alpha r^2$

SWOBODNY, TŁUMIONY I WYMUSZONY OSCYLATOR HARMONICZNY



l_0 - długość nieważonej sprężyny

$$V = \frac{k}{2} (x - l_0)^2$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

Nowa zmienna $q := x - l_0$
Wychylenie masy m z położenia
równowagi

$$\dot{q} = \dot{x}$$

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - kq^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow m\ddot{q} + kq = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\text{SWOBODNY OSH}} \quad \ddot{q} = -\omega_0^2 q$$

Załóżmy, że działają siła tarcia (oporu)

$$F_R = -c\dot{x}, \quad \text{albo} \quad Q_R = -c\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_R = 0 \Rightarrow m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0$$

$$\text{oznaczenia } \gamma := \frac{c}{2m} \Rightarrow \ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\boxed{\text{TŁUMIONY OSH}}$$

jednorodny równanie różniczkowe II-rzędu

Szukamy rozwiązań przy pomocy Ansatz'u

$$q(t) = A e^{\lambda t} \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Ogólne rozwiązanie

$$q(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

W zależności od wartości $\sqrt{\quad}$ mamy 3 różne przypadki

a) $\gamma^2 < \omega_0^2$ stałe tłumienie (Drgania tłumione)

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

$$q(t) = e^{-\gamma t} [C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}]$$

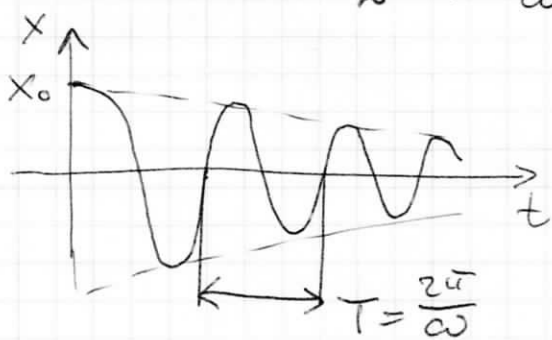
Rozwiązanie będzie rzeczywiste, gdy wprowadzimy rzeczywiste wartości początkowe

$$q(0) = q_0 \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{q_0}{2} + \frac{\gamma q_0 + \dot{q}_0}{2i\omega} \quad C_2 = C_1^* = \frac{q_0}{2} - \frac{\gamma q_0 + \dot{q}_0}{2i\omega}$$

$$q(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

gdzie $A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\gamma q_0 + \dot{q}_0}{\omega}\right)^2}$ $\tan \varphi_0 = \frac{q_0 \omega}{\gamma q_0 + \dot{q}_0}$



b) $\gamma^2 > \omega_0^2$ ogólne rozwiązanie
 $q(t) = e^{-\gamma t} [C_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}]$

nie opisuje drgań

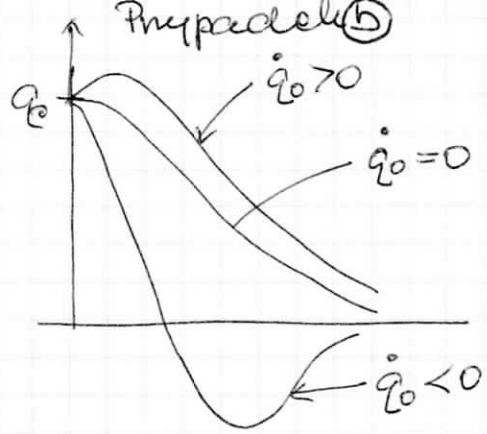
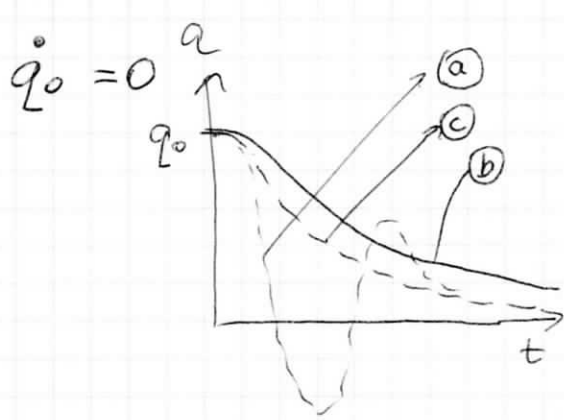
$$q(t) = e^{-\gamma t} \left[q_0 \cosh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right]$$

c) $\gamma^2 = \omega_0^2$

$$q(t) = e^{-\gamma t} (C_1 + C_2 t)$$

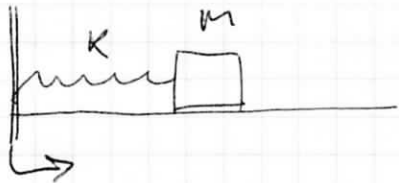
$$q(t) = e^{-\gamma t} (q_0 + (\dot{q}_0 + \gamma q_0) t)$$

$$q(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$



(3)

DRGANIA WYMUSZONE



Punkt zaczepienia sprężyny porusza się w czasie

$l(t)$ - długość sprężyny, załóżmy $l(t) = l_0 \cos \Omega t$

[wiązy holonomiczne, reonomiczne]

$$V = \frac{k}{2} (x - l_0 \cos \Omega t)^2$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

$$L = T - V$$

słota oporu musi być uwzględniona

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} - F_R = 0$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k(x - l_0 \cos \Omega t) = 0$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = k l_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

gdzie $f_0 = \frac{k l_0}{m} = \omega_0^2 l_0$
WYMUSZONY, TŁUMIONY OH

$$x^{\text{ogólne}}(t) = x_{\text{hom}}^{\text{og}}(t) + x_{\text{nohom}}^{\text{spec}}(t)$$

$$x_{\text{hom}}^{\text{og}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Po pewnym czasie, ruch masy m będzie opisany przez $x_{\text{nohom}}^{\text{spec}}(t)$

Zamieniamy niejednorodność $f_0 \cos \Omega t \rightarrow f_0 e^{i\Omega t}$
'trick' matematyczny

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\Omega t}$$

szukamy specjalnego rozwiązania w postaci

$$x(t) = A e^{i(\Omega t - \varphi)}$$

$$A(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) = f_0 e^{i\varphi} \quad (4)$$

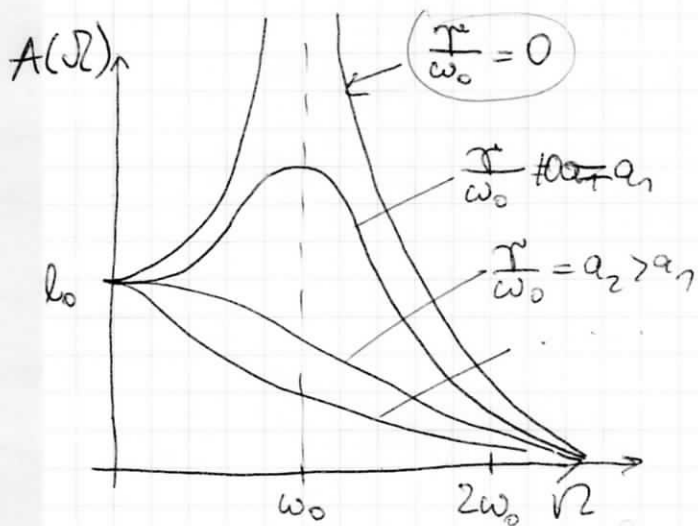
$$A\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = f_0 \quad ; \quad \tan\varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}} = b_0 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2 \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\Omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$$

Dla nasów $t \gg \frac{1}{\gamma}$, zostaje tylko rozwiązanie (stacjonarne) $A \cos(\Omega t - \varphi)$

[To rozwiązanie nazywamy atraktorem]

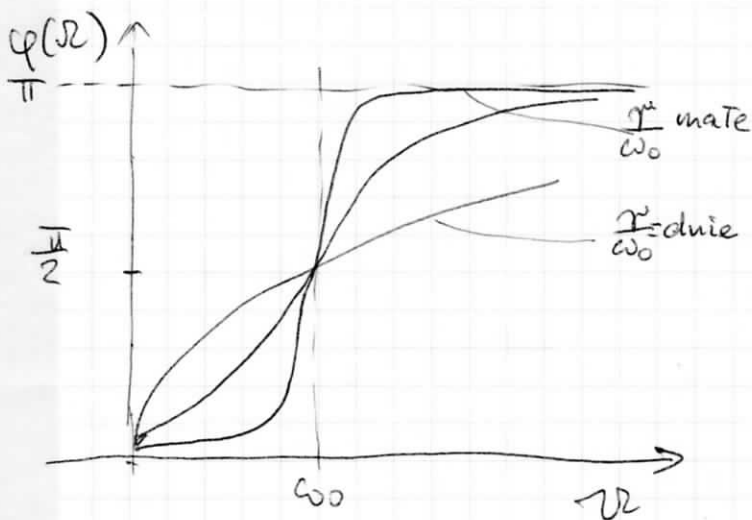


$$\text{Dla } \frac{\gamma}{\omega_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$A(\Omega)$ ma maksimum dla częstotści rezonansowej

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

$$A_{\max} = A(\Omega_R) = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$



$$\text{Dla } \frac{\gamma}{\omega_0} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$A(\Omega)$ maleje monotonicznie

