{WYKŁAD 6}

Symetrie i wielkości zachowywane

1. Kanoniczne pędy

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Przykład: Wahadło proste

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \quad \leftarrow \text{moment pędu}$$

W równaniach Lagrange'a mamy $V(q, t)$ lub $U(q, \dot{q}, t)$

- Dla potencjałów niezależnych od prędkości kanoniczny pęd jest pędem kinematycznym

Dla potencjałów zależnych od prędkości nie jest to prawdą

$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$ — kanoniczny impuls

kinematyczny impuls $m\dot{\vec{r}} = \vec{p} - q\vec{A}$

2. Zmienne cykliczne i wielkości zachowywane

Współrzędna uogólniona q_j, która nie występuje w funkcji Lagrange'a, ale występuje jej pochodna czasowa $\dot{q}_j$ nazywa się współrzędną cykliczną

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \implies \frac{d}{dt} p_j = 0 \implies p_j = \text{const}$$

- Kanoniczne pędy zmiennych cyklicznych, ~~są wielkościami~~ są stałe

Def Funkcja $f(q,\dot{q},t)$ nazywa się "wielkością zachowywaną"
"stałą ruchu"
"całką pierwszą"
gdy dla wszystkich trajektorii $q_j(t)$ spełniających równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} f(q,\dot{q},t) = 0$$

Inaczej $f(q,\dot{q},t)$ jest stała dla wszystkich ruchów.

Wybór zmiennych uogólnionych niezwykle ważny dla rozwiązywania równań ruchu

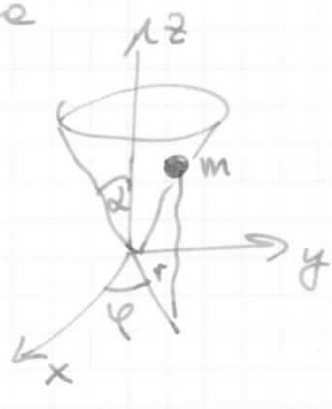
Współrzędne uogólnione powinny być tak wybierane, żeby dawać jak najwięcej stałych ruchu

- Stałe ruchu, równań bez rozwiązania równ. ruchu są niezwykle użyteczne do interpretacji ruchu
- Jeżeli układ ma wystarczająco dużo stałych ruchu nie może być chaotyczny.
- Każda stała ruchu (energia, pęd, moment pędu) zmniejsza liczbę całkowań potrzebnych do rozwiązania równań ruchu o 1.

Przy całkowaniu numerycznym równań ruchu stałe ruchu używane są do kontroli dokładności obliczeń.

Przykład na ćwiczenia

Cząstka na wewnętrznej powierzchni stożka



Później na wykładzie
Równanie torów planet $r(\varphi)$
np. wektor Lenza

Symetrie związane ze stałymi ruchu

Gdy układ jest niezmienniczy względem przesunięcia współrzędnej

$$q_i \to q_i' = q_i + \alpha$$

czyli f. Lagrange'a nie jest zmieniona
Funkcja Lagrange'a nie może zależeć od q_i, czyli q jest zmienną cykliczną

a kanoniczny pęd odpowiadający q stałą ruchu.

Chcemy pokazać teraz związek pomiędzy Transformacjami nie zmieniającymi funkcji Lagrange'a a Stałymi ruchu.

Twierdzenie Noether

Rozważmy przekształcenia

$$q_i \to q_i'(q_1 \dots q_{3N-k}, t, \alpha) \qquad i = 1 \dots \underbrace{3N-k}_{f}$$

f ← liczba stopni swobody

które są

1) odwracalne
$$q_i = q_i(q_1', \dots q_{3N-k}', t, \alpha)$$

2) klasy C^1 względem ciągłego parametru α (różniczkowalne w sposób ciągły)

3) dla $\alpha = 0$ $\quad q_i \to q_i'$ transformacja identyczności

$$q_i'(q_1 \dots q_{3N-k}, t, \alpha = 0) = q_i$$

Przykłady
a) $\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{a}$ translacja

b) obrót o oś z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha - y\cos\alpha \\ z \end{pmatrix}$$

Funkcja Lagrange'a w nowych zmiennych

$$L(q,\dot{q},t) = \cancel{L(q(q'\dot{q}'}$$
$$= L(q(q',t,\alpha),\dot{q}(q',t,\alpha),t) =: L'(q',\dot{q}',t,\alpha)$$

Liczymy pochodną cząstkową $\frac{\partial L'}{\partial \alpha}$

zmienne q' i $\dot{q}'$ są stałe

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{3N-k}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial\left[\frac{d}{dt}q_i(q',t,\alpha)\right]}{\partial \alpha}\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{3N-k}\left\{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \alpha}q_i(q',t,\alpha)\right)\right\}$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{3N-k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha}\right\}$$

Równanie jest ważne dla wszystkich parametrów α. Możemy więc położyć po obliczeniu pochodnej $\alpha = 0$

$$\left.\frac{\partial L'(q',\dot{q}',t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{3N-k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left.\frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right\}$$

I Interesują nas przekształcenia zmiennych, które nie zmieniają f. Lagrange'a

tzn

$$L(q,\dot{q},t) = L'(q',\dot{q}',t,\alpha) \underset{\uparrow}{=} L(q',\dot{q}',t)$$

niezmienniczość

Nowe współrzędne q_i' 'mają' tę samą funkcję Lagrange'a a więc i takie same równania ruchu co współrzędne uogólnione q_i.

Nowa funkcja Lagrange'a nie zależy od zmiennej α, mamy więc

$$\left.\frac{\partial L'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

Twierdzenie o dużym znaczeniu dla nowoczesnej fizyki
Tw. Noether

Funkcja $I(q, \dot{q}, t)$ jest 'stałą ruchu',

$$\boxed{I(q,\dot{q},t)=\sum_{i=1}^{3N-K}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}}$$

kiedy funkcja Lagrange'a pozostaje niezmiennicza przy przekształceniach współrzędnych uogólnionych (ciągłych i z ciągłymi pochodnymi)

Inaczej
Dla każdego przekształcenia współrzędnych uogólnionych, które nie zmienia f. Lagrange'a istnieje stała ruchu.

Przykład
Niezmienniczość względem obrotów

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{M}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - V(x^2+y^2, z)$$

Funkcja L jest niezmiennicza względem obrotów ~~o os~~ wokół osi z.

Znaleźć odpowiadającą tej symetrii stałą ruchu.

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\alpha + y'\sin\alpha\\ -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\\ z'\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', \alpha) = \frac{M}{2}(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2) - V(x'^2+y'^2, z') \equiv L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}')$$

$$\frac{\partial x(x',\alpha)}{\partial\alpha} = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = y$$

$$\frac{\partial y(y',\alpha)}{\partial\alpha} = -x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = -x$$

Liczymy I

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(-x) = m(\dot{x}y - \dot{y}x) = -L_3$$

Składowa z-owa Momentu pędu jest stałą ruchu.

Twierdzenie Noether

układ N punktów o więzach holonomicznych
siły potencjalne

Przekształcenie
$q_i \to q_i'(q_1 \ldots q_f, t; \alpha)$
takie, że
$L'(q', \dot{q}', t, \alpha) := L(q(q',t;\alpha), \dot{q}(q',t;\alpha), t) = L(q', \dot{q}', t)$
Funkcja Lagrange'a jest niezmiennicza przy tym przekształceniu

$\Rightarrow$

$$I(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

jest stałą ruchu

Otrzymujemy również dodatkową stałą ruchu, jeżeli funkcja Lagrange'a zmienia się w następujący SZCZEGÓLNY SPOSÓB

$$L'(q',\dot{q}',t,\alpha) = L\left[q(q',t,\alpha), \frac{d}{dt} q(q',t,\alpha), t\right] =$$

$$= L(q',\dot{q}',t) + \frac{d}{dt}F(q',t,\alpha)$$

Funkcja Lagrange'a nazywa się w tym przypadku "symetryczną" względem przekształcenia

$$\frac{\partial L'(q',\dot{q}',t,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F(q',t,\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

wtedy funkcja $J(q,\dot{q},t)$

$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(q',t,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}}$$

jest stałą ruchu. strona WM-11 TUTAJ następna

Przykład: Transformacja Galileusza

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx$$

1) Pokazać, że Tr.G: $x \to x' = x + \alpha t$ jest transformacją symetryczną

2) Znaleźć wielkość zachowaną

= Nowa f. Lagrange'a

$$L'(x',\dot{x}',t,\alpha) = \frac{m}{2}(\dot{x}'-\alpha)^2 - mg(x'-\alpha t) = L(x',\dot{x}') + \frac{d}{dt}F(x',t,\alpha)$$

gdzie $F(x',t,\alpha) = \alpha m\left(\frac{g}{2}t^2 - x'\right) + \alpha^2\frac{m}{2}t$

$$J(x,\dot{x},t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x(x',t,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} = m\left(x - \dot{x}t - \frac{g}{2}t^2\right)$$

Niezmienniczość cechowania równ. Lagrange'a (II rodzaju) ⑦

$L(q, \dot{q}, t)$

i $\hat{L}(q, \dot{q}, t) := L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} F(q, t)$

dowolna funkcja czasu i wsp. uogólnionych

Funkcja L i $\hat{L}$ prowadzą do identycznych równań ruchu.

$$\frac{d}{dt} F(q, t) = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q}$$

oraz $$\frac{\partial}{\partial q} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t}$$

Przekształcenia współrzędnych, które z dokładnością do 'cechowania' nie zmieniają f. Lagrange'a:

$$L(q, \dot{q}, t) \to L(q', \dot{q}', t) + \frac{dF}{dt}(q', t, \alpha)$$

nazywają się <u>symetryczymi</u>, ponieważ współrzędne q_i i q_i' spełniają te same równania.

---

ogólne uwagi o Tw. Noether

W mechanice Lagranżowskiej

(Symetria) $\Longrightarrow$ stała ruchu

W mechanice Hamiltonowskiej

(symetria) $\Longleftrightarrow$ stała ruchu

W mechanice Hamiltonowskiej rozpatrujemy szerszą klasę przekształceń.

4. Zachowanie Energii

Rozważenie klasy przekształceń

$t \to t' = t + \alpha$ (przesunięcia czasowe)

Zakładamy, że f. Lagrange'a jest niezmiennicza względem przesunięcia czasowego

$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t+\kappa)$ $\kappa = \text{const}$

F. Lagrange'a nie może w takim przypadku zależeć od czasu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{3N-k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) \to \frac{d}{dt}\left\{\sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right\} = 0$$

$\Rightarrow$ wielkość $\boxed{H := \sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L} = \text{const}.$

Dla sił zachowawczych $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$

$$H = 2T - L = T + V = E$$

funkcja Hamiltona

1) H jest stałą ruchu, gdy L nie zależy explicite od czasu

2) Dla więzów skleronomicznych, holonomicznych, sił zachowawczych i spoczywających układów współrzędnych funkcja Hamiltona jest równa energii całkowitej układu.