WIĘZY

Zmienne uogólnione

Układ N-punktów opisany przez 3N współrzędnych kartezjańskich

$$\{x_1 \ldots\ldots x_{3N}\} \equiv \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N\}$$

$$\{x_1\, x_2\, x_3, x_4\, x_5\, x_6, \ldots\, x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n} \ldots\}$$

Przestrzeń konfiguracyjna

Też mieliśmy przykład opisu ruchu używając współrzędnych cylindrycznych.

Współrzędne uogólnione

Wszystkie zmienne, które opisują położenie układu w przestrzeni konfiguracyjnej

$$\{q_1 \ldots\ldots q_{3N}\}$$

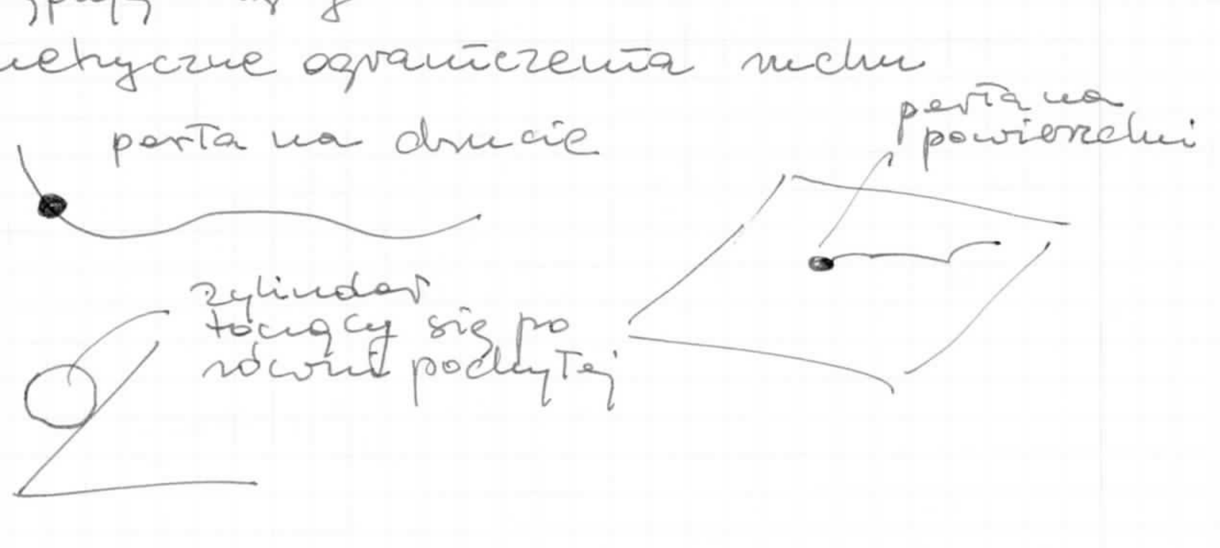
$$x_j = x_j(q_1, \ldots\, q_{3N}, t) \qquad j = 1, \ldots 3N$$

$$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q_1, \ldots\, q_{3N}, t) \qquad l = 1, \ldots N$$

W większości problemów mechanicznych występują więzy —

Geometryczne ograniczenia ruchu

np



- Więzy utrudniają rozwiązanie równań ruchu
- Liczba niezależnych zmiennych w równaniach ruchu maleje
- pojawiają się siły reakcji

Klasyfikacja więzów

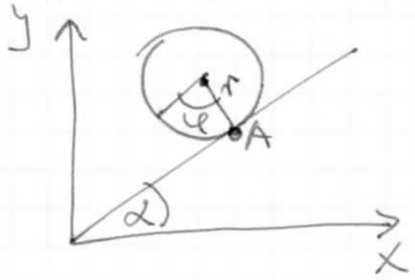
Więzy holonomiczne

$$\boxed{f_i(q_1, \dots q_{3N}, t) = 0 \qquad i = 1 \dots k}$$

Ograniczają liczbę stopni swobody do $f = 3N - k$

Przykłady

(I)



Krążek porusza się w płaszczyźnie xy po równi pochyłej o nachyleniu α.
Nie ma poślizgu pomiędzy krążkiem a płaszczyzną, po której stacza się krążek.

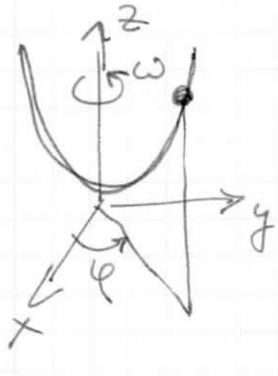
$x_A - r\varphi\cos\alpha = 0 \qquad y_A - r\varphi\sin\alpha = 0$

(II) Płaskie wahadło

$r, \varphi, \theta \qquad r = l \qquad r - l = 0$

$\varphi = const = \varphi_0$

(III)



Perła na parabolicznym drucie wirującym z częstością ω wokół osi z.

Cylindryczny układ współrzędnych φ, ρ, z

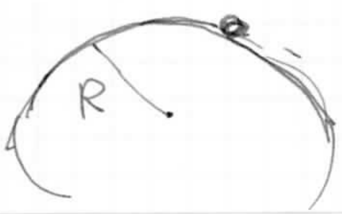
$\varphi - \omega t = 0 \qquad f_1(\varphi, \rho, z, t) = 0$

$z - a\rho^2 = 0 \qquad f_2(\varphi, \rho, z, t) = 0$

Więzy nieholonomiczne

Geometryczne ograniczenia na ruch nie dadzą się napisać w formie zależności funkcyjnej, jak dla więzów holonomicznych.

Przykłady: cząstka na powierzchni kuli o promieniu R



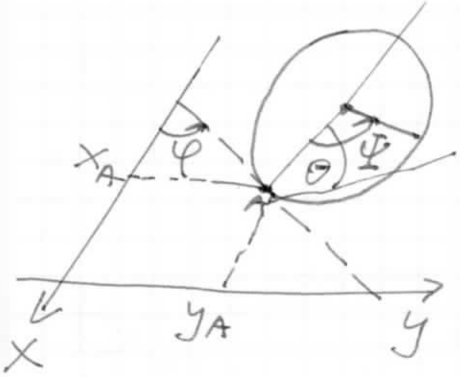
$r^2 - R^2 \geq 0$

Bardzo ważna klasa więzów nieholonomicznych

Ograniczenia ruchu dają się zapisać tylko w postaci różniczek.

Standardowy przykład więzów nieholonomicznych

Cienki krążek toczący się po płaszczyźnie bez poślizgu



- współrzędne punktu styku krążka z płaszczyzną x_A & y_A
- φ kąt pomiędzy osią x i prostą będącą przecięciem płaszczyzny (po której krążek się toczy) z płaszczyzną krążka
- Θ: kąt nachylenia krążka do płaszczyzny toczenia
- Ψ: kąt obrotu krążka

Orientacja krążka zmienia się ciągle, a więc i φ. Tylko dla małych zmian Ψ, $d\Psi$ można przyjąć, że φ jest stałe.

Odtoczona droga $r d\Psi$; rzutujemy ją na osie x i y

Mamy $\quad -r d\Psi \cos\varphi \qquad -r d\Psi \sin\varphi$

$$dx_A + r d\Psi \cos\varphi = 0 \qquad dy_A + r d\Psi \sin\varphi = 0 \qquad // /dt$$

$$\boxed{\dot{x}_A + r\dot{\Psi}\cos\varphi = 0 \qquad \dot{y}_A + r\dot{\Psi}\sin\varphi = 0}$$

Tych równań nie można scałkować

$$\int dx_A = r\int \cos\varphi \, d\Psi \qquad \int dy_A = r\int \sin\varphi \, d\Psi$$

ponieważ dla warunku toczenia bez poślizgu nie możemy podać zależności φ od Ψ

Dlatego więzy są nieholonomiczne!

Dopiero po rozwiązaniu równań ruchu można podać zależność $\varphi(\Psi)$!

Nieholonomiczne więzy wiążące różniczki (lub prędkości) w ogólności przyjmują następującą postać

$$\boxed{\sum_j a_{ij}\, dq_j + a_{it}\, dt = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_j a_{ij}\, \dot{q}_j + a_{it} = 0}$$

Współczynniki a_{ij} i a_{it} są funkcjami współrzędnych uogólnionych i czasu, (q_i, t) ale nie prędkości $(\dot{q}_i)$.

Różniczkowych więzów ograniczą "w małym" ok liczbę stopni swobody, ale "w dużym" liczba stopni swobody pozostaje niezmieniona.

Obręcz może osiągnąć dowolny punkt x_A, y_A przez odpowiedni dobór ϑ, φ, Φ

Dla infinitezymalnych zmian zmiennych obręcz ma tylko ~~dwa~~ trzy stopnie swobody, ponieważ mamy dwa warunki więzów.

=

Więzy holonomiczne można też zapisać w formie różniczkowej.

$$df_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0$$

gdzie $a_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial q_j}$ $\quad a_{it} := \frac{\partial f_i}{\partial t}$

Relacje $\boxed{\sum_j a_{ij}\, dq_j + a_{it}\, dt = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_j a_{ij}\, \dot{q}_j + a_{it} = 0}$

opisują więzy holonomiczne, gdy ~~przez~~ całkowanie mogą zostać sprowadzone do postaci

$$f_i(q_1 \ldots q_{3N}, t) = 0$$

Czyli musi istnieć funkcja $f_i(q, t)$, która te równania spełnia

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j} \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j}$$

Przypadek istnienia funkcji jest spełniony, gdy zachodzą następujące relacje pomiędzy współczynnikami a

$$\boxed{\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial q_j} \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial q_j}}$$

Jeżeli współczynniki a_{ij}, a_{it} nie spełniają powyższych warunków, to więzy nie są holonomiczne.

Jeszcze o klasyfikacji więzów

Więzy, w których występuje explicite czas nazywają się <u>reonomiczne</u> (płynące)

Więzy niezależne od czasu nazywają się <u>skleronomiczne</u> (sztywne)

W wypadku występowania więzów, równania Newtona muszą zostać zmodyfikowane

- $$\cancel{m_i a_i} \quad m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \longrightarrow m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \underbrace{\vec{F}_{Ri}}_{\text{siły reakcji}}$$

$$\vec{F}_{Ri} \equiv \vec{Z}_i \text{ (inne oznaczenie)}$$

- Ruch układu N-punktów materialnych, na który nałożono k holonomicznych więzów odbywa się w przestrzeni 3N - k wymiarowej.

To znaczy, że nie wszystkie współrzędne uogólnione są niezależne.

Można bez straty ogólności przyjąć, że pierwsze 3N - k współrzędne uogólnione są niezależne.

Wtedy k zmiennych zostaje wyeliminowanych przez równania więzów.

$$f_i(q_1 \dots q_{3N}, t) = 0 \qquad i = 1 \dots s$$

Przez 3N−s niezależnych współrzędne można wyrazić wszystkie zmienne uogólnione łącznie z s zmiennymi zależnymi

$$q_j = q_j(q_1 \dots q_{3N-k}, t) \qquad j = 1, \dots 3N$$

zależność dla pierwszych 3N−k jest trywialna.

- Takie zmienne kartezjańskie dadzą się wyrazić przez 3N−k niezależnych współrzędnych uogólnionych.

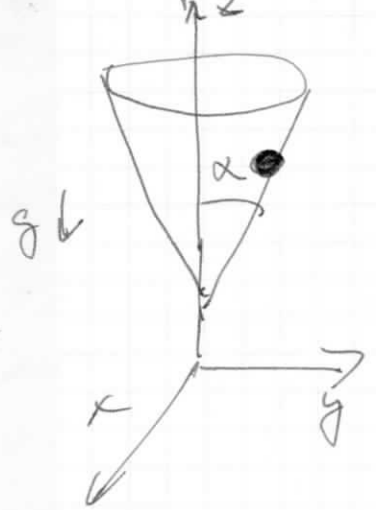
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots q_{3N-k}, t) \qquad i = 1 \dots N$$

- lub inne zmienne (współrzędne) uogólnione

$$q'_j = q'_j(q_1 \dots q_{3N-k}, t) \qquad j = 1, \dots 3N.$$

Przykład.

Cząstka w jednorodnym polu grawitacyjnym na powierzchni walca



Warunek więzów

$$\sqrt{x^2+y^2} - z\,\mathrm{tg}\alpha = f(x, y, z) = 0$$

Weźmy współrzędne walcowe jako współrzędne uogólnione

(φ, r, z)

$$r - z\tan\alpha$$

$$f(\varphi, r, z) = r - z\,\mathrm{tg}\alpha = 0$$

Za zmienne niezależne można wziąć φ i r.

$$z = r\cot\alpha$$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{Ri}$$

Kierunek sił reakcji

Zacznijmy od prostego przykładu

Ruch cząstki po powierzchni zadanej równaniem

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{r},t) = 0 \\ \vec{F}_R = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} \end{array}\right\}$$

Z doświadczenia wiemy, że $\vec{F}_R \perp$ powierzchni

$$\vec{F}_R(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \lambda(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\,\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}$$

$$\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} \equiv \nabla_{\vec{r}} f \equiv \operatorname{grad} f$$

Czy ta wiedza pomoże nam rozwiązać równanie Newtona?

TAK zawsze można wyeliminować λ z równania.

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \nabla_{\vec{r}} f \\ f(\vec{r},t) = 0 \end{cases}$$

$$f \equiv 0 \Rightarrow 0 = \frac{df}{dt} = \dot{\vec{r}}\cdot\nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$0 = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \ddot{\vec{r}}\cdot\nabla f + \dot{\vec{r}}\cdot\frac{d\nabla f}{dt} + \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

mnożymy równanie Newtona przez ∇f

$$m\ddot{\vec{r}}\cdot\nabla f = \vec{F}\cdot\nabla f + \lambda \nabla f\cdot\nabla f$$

$$m\left(\dot{\vec{r}}\cdot\frac{d}{dt}\nabla f + \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \vec{F}\cdot\nabla f + \lambda(\nabla f)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\vec{F}\cdot\nabla f}{(\nabla f)^2} - \frac{m\left(\dot{\vec{r}}\cdot\frac{d}{dt}\nabla f + \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)}{(\nabla f)^2}$$

możemy λ wstawić do równania ruchu

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\left[\vec{F}\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|} + \frac{m\left(\dot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}\nabla f + \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right)}{|\nabla f|}\right]}$$

Weźmy już dyskutowany przykład cząstki na wewnętrznej powierzchni stożka.

$$\vec{F} = (0, 0, -mg)$$

$$f(x,y,z) = 0 \qquad \sqrt{x^2+y^2} - z\,\mathrm{tg}\alpha = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\mathrm{tg}\alpha\right)$$

$$\vec{F}\cdot\nabla f = mg\,\mathrm{tg}\alpha \qquad \Rightarrow \lambda = -\frac{mg\,\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$|\nabla f| = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

Rozpatrzmy cząstkę poruszającą się po krzywej określonej jako przecięcie dwóch powierzchni

$$f_1(\vec{r}, t) = 0 \qquad f_2(\vec{r}, t) = 0$$

$$\vec{F}_R(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \lambda_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} + \lambda_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\frac{\partial f_2}{\partial \vec{r}}$$

Dodatkowo do wyznaczenia dwie skalarne funkcje λ_1 i λ_2.

Mamy k więzów holonomicznych

$$f_s(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, t) = 0 \qquad s = 1 \ldots k$$

$$\vec{F}_{Ri} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, t)\frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}_i} \qquad i = 1 \ldots N$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{Rj} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(x, \dot{x}, t)\dfrac{\partial f_s}{\partial x_j} & j = 1 \ldots 3N \\ f_s(x, t) = 0 & s = 1 \ldots k \end{cases}$$

pamiętamy, że $x = \{\underbrace{x_1\, x_2,\, x_3}_{\vec{r}_1} \ldots x_{3N}\}$

Pamiętamy również, że

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_j} := a_{sj}(x, t) \qquad \begin{matrix} s = 1 \ldots k \\ j = 1 \ldots 3N \end{matrix}$$

(*) $$\boxed{F_{Rj}(x, \dot{x}, t) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(x, \dot{x}, t)\, a_{sj}(x, t)}$$

składowa j siły reakcji

Równanie (*) nie wynika z zasad dynamiki Newtona.
Zostało zapostulowane (= ręcznie włożone do teorii)

Postuluje się również, że w przypadku więzów nieholonomicznych siły reakcji związane z k równaniami więzów

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{sj}\,dx_j + a_{st}\,dt = 0 \qquad s=1..k$$

mają postać analogiczną do sił reakcji w przypadku więzów holonomicznych!

| Pokażemy, że postulat (*) dotyczący postaci sił reakcji jest równoważny zasadzie d'Alemberta.

Zasada d'Alemberta

Zdefiniujemy najpierw pojęcie przesunięć wirtualnych $\delta\vec{r}_i$ - cząstki i

- infinitezymalne przesunięcia cząstki, które są zgodne z więzami, i zachodzą natychmiast (tzn. czas nie zmienia się podczas przesunięcia) mają 3 własności
  - są infinitezymalne
  - $\delta t = 0$, nie mogą być wykonane w rzeczywistości dlatego wirtualne

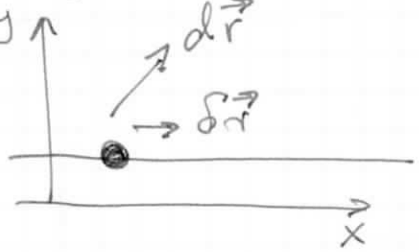
    Rzeczywiste przesunięcia $d\vec{r}_i$ następują w czasie $dt > 0$
  - Spełniają równania więzów w chwili czasu t

Uwaga - wirtualne przesunięcia nie mają nic wspólnego z ruchem punktu w przestrzeni konfiguracyjnej

Przy więzach skleronomicznych (tzn. niezależnych od czasu) wirtualne przesunięcia mogą być realnymi

Przy więzach reonomicznych (tzn. zależnych od czasu) wirtualne przesunięcia różnią się od rzeczywistych

Przykład



perła na drucie (napiętym wzdłuż osi x) porusza się ze stałym przyspieszeniem a w kierunku y.

Czyli warunek dla perły na drucie

$$y - \frac{1}{2}at^2 = 0$$

$$\delta\vec{r} \parallel x$$

$d\vec{r}$ - ma też współrzędną prostopadłą (wzdłuż osi y) do drutu $vdt = at\,dt$.

Zasada d'Alemberta

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{Ri} \qquad m_i = \text{const} \quad i = 1 \ldots N$$

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{Ri}\cdot\delta\vec{r}_i$$

Postulat: Natura sił reakcji jest taka, że siły nie wykonują żadnej wirtualnej pracy, tzn.

$$(**) \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{Ri}\cdot\delta\vec{r}_i = 0}$$

Zasada prawdopodobna, ale nie może być wyprowadzona z zasad dynamiki Newtona.

Można powiedzieć, że zasada d'Alemberta jest dodatkowym aksjomatem mechaniki klasycznej.

Uwagi

a) W wypadku więzów reonomicznych tylko praca wirtualna sił reakcji jest zero

$$F_R\cdot d\vec{r} \neq 0 \qquad \vec{F}_R\cdot\delta\vec{r} = 0$$

Przykład z perłą $\quad \vec{F}_R \parallel y \qquad \vec{F}_R\cdot\delta\vec{r} = 0$

$$\vec{F}_R\cdot d\vec{r} \neq 0$$

b) poszczególne składniki w sumie (**) nie muszą być równe 0

Tylko suma musi znikać!

Zasada d'Alemberta prowadzi do równań

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i)\cdot\delta\vec{r}_i=0}$$

Tutaj również poszczególne składniki $m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i$ nie mogą być równe 0!

ponieważ wirtualne przesunięcia $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ ~~na skutek nałożonych więzów~~ są od siebie zależne.

Jeżeli mamy więzy holonomiczne można wyrazić $\delta\vec{r}_i$ przez $3N-k$ niezależnych δq_k odpowiadających współrzędnym uogólnionym

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,\dots q_{3N-k},t) \qquad i=1\dots N$$

$$\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

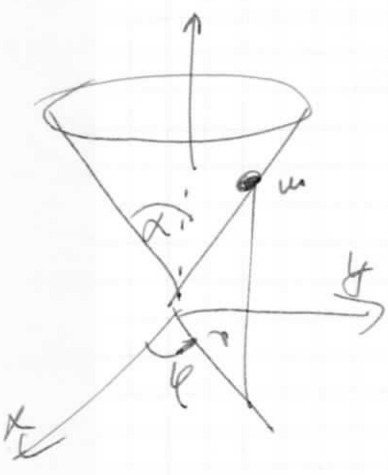
$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j=0$$

Ponieważ δq_j $j=1\dots 3N-k$ są niezależne

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}=0} \qquad j=1\dots 3N-k$$

$3N-k$ równań ruchu

Przykład:



$$(m\ddot{\vec{r}}-m\vec{g})\cdot\delta\vec{r}=$$
$$=m[\ddot{x}\,\delta x+\ddot{y}\,\delta y+(\ddot{z}+g)\,\delta z]=0$$

Równanie więzów

$$\boxed{r-z\tan\alpha=0}$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ są od siebie zależne

Używamy współrzędnych cylindrycznych

$$(x,y,z)=r(\cos\varphi,\sin\varphi,\cot\alpha)$$

$$\rightarrow \ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$$

$\delta x = \delta r \cos\varphi - r\sin\varphi\,\delta\varphi$
$\delta y = \delta r \sin\varphi + r\cos\varphi\,\delta\varphi$
$\delta z = \delta r \cot\alpha$

$\odot$ $[2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}]r\,\delta\varphi + [(tg\alpha + ctg\alpha)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 tg\alpha + g] \times ctg\alpha\,\delta r = 0$

Ponieważ $\delta\varphi$ i δr są niezależne, powyższy warunek ($\odot$) prowadzi do równań ruchu

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$
$$(tg\alpha + ctg\alpha)\,\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 tg\alpha + g = 0$$

☒ Zapostulowana forma sił reakcji, [czyli, że są prostopadłe do równań więzów] jest równoważna zasadzie d'Alemberta.

☒ <u>Zasada równowagi dynamicznej</u>
układ jest w równowadze mechanicznej, kiedy praca wirtualna wszystkich sił działających na układ znika

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

↑ ważne zastosowanie zasady d'Alemberta.

Podsumowanie

1) Wirtualne przesunięcia $\delta\vec{r}_i$ są infinitezymalne, $\delta t = 0$, spełniają równania więzów

2) Dynamikę Układu punktów materialnych można badać przy pomocy równ. Newtona z siłami Reakcji.
Dla pewnej klasy więzów (holonomiczne) istnieje łatwiejszy sposób otrzymywania równań ruchu

3) Zasada d'Alemberta

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Ri} \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

4) Równania d'Alemberta wynikające z ~~równania~~ zasady d'Alemberta

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

Dla k równań więzów holonomicznych, powyższe równania przyjmują postać

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \ldots 3N-k$$