$$\vec{r}_{Ii} = \vec{r}_s + \vec{r}_i \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 0 \qquad (2-13)$$

$$\dot{\vec{r}}_{Ii} = \dot{\vec{r}}_s + \dot{\vec{r}}_i \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = 0$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_{Ii}^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_s + \dot{\vec{r}}_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{r}}_s^{\,2} + 2\dot{\vec{r}}_s \cdot \dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) =$$

$$= \frac{\dot{\vec{r}}_s^{\,2}}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) + \dot{\vec{r}}_s \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i}_{0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

$$= \underbrace{\frac{M \vec{V}_s^{\,2}}{2}}_{\text{energia kinetyczna środka masy}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

Energia kinetyczna środka masy jest tylko częścią energii kinetycznej (całkowitej).

$\boxed{\text{WYKŁAD 3 \& 3a} \quad \text{2 \& 4 III 2010}}$

Całkowity moment pędu (3-1)

$$\vec{L}_{tot} := \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ii} \times \dot{\vec{r}}_{Ii}$$

Przy założeniu, że $m_i = const$

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \dot{\vec{r}}_{Ii} \times \dot{\vec{r}}_{Ii} + m_i \vec{r}_{Ii} \times \ddot{\vec{r}}_{Ii} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ii} \times \ddot{\vec{r}}_{Ii} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_i$$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_{Ii} = \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \right)$$

Moment siły $\quad \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_i^{ext} := \vec{N}$

Co z członem $\quad \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_{ij}$

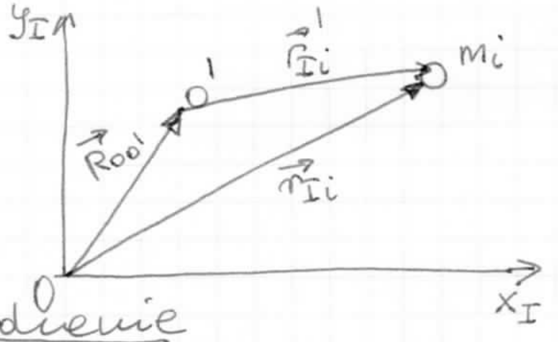
Podwójna suma zawiera człony

$$\vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_{Ij} \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_{Ii} - \vec{r}_{Ij}) \times \vec{F}_{ij}$$

znika na podstawie założenia, że siły wewnętrzne skierowane są wzdłuż linii łączącej punkty materialne "i" & "j".

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_{tot} = \vec{N}} \quad \text{lub} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ii} \times \ddot{\vec{r}}_{Ii} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_i^{ext}$$

Pytanie: Czy $\vec{L}_{tot}$ i $\vec{N}$ zależą od wyboru środka układu współrzędnych?



O i O'
Dwa różne środki układu współrzędnych spoczywających.

Twierdzenie

$\vec{L}_{tot}$ i $\vec{N}$ nie zależą od wyboru początku układu współrzędnych, gdy środek masy układu punktów spoczywa.

$$\vec{L}\,'_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}\,'_{Ii} \times \dot{\vec{r}}\,'_{Ii}$$

$$\vec{r}\,'_{Ii} = \vec{r}_{Ii} - \vec{R}_{OO'} \qquad \dot{\vec{r}}\,'_{Ii} = \dot{\vec{r}}_{Ii}$$

$$\vec{L}\,'_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{Ii} - \vec{R}_{OO'}) \times \dot{\vec{r}}_{Ii} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ii} \times \dot{\vec{r}}_{Ii} - \vec{R}_{OO'} \times \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_{Ii} =$$

$$= \vec{L}_{tot} - \vec{R}_{OO'} \times (M \dot{\vec{r}}_S)$$

Dla spoczywającego środka masy mamy

$$\dot{\vec{r}}_S = 0 \qquad \Rightarrow \vec{L}\,'_{tot} = \vec{L}_{tot}$$

Wykład 4
14.10.2008

$$\vec{N}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_{Ii} \times \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_i^{ext} - \vec{R}_{00'} \times \sum_{i=1}^{N} F_i^{ext} \qquad (3\text{-}3)$$

$$= \vec{N} - \vec{R}_{00} \times (M\ddot{\vec{r}}_s)$$

$$\dot{\vec{r}}_s = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_s = 0 \Rightarrow \vec{N}' = \vec{N}$$

Tutaj koniec wykładu 4 | początek

20.10.08 Wykład 5

Jak z momentu pędu (całkowitego) $\vec{L}_{tot}$ wydzielić moment pędu związany ze środkiem masy?

$$\vec{r}_{Ii} = \vec{r}_s + \vec{r}_i \qquad \dot{\vec{r}}_{Ii} = \dot{\vec{r}}_s + \dot{\vec{r}}_i$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{Ii} = \sum_i m_i \vec{r}_s + \sum_i m_i \vec{r}_i$$
$$M\vec{r}_s = M\vec{r}_s + \sum_i m_i \vec{r}_i$$
$$\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = 0$$

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_s + \vec{r}_i) \times (\dot{\vec{r}}_s + \dot{\vec{r}}_i) =$$

$$= M\vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + \vec{r}_s \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}_{=0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)}_{=0} \times \dot{\vec{r}}_s + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

$$= M\vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

$$\boxed{\vec{L}_{tot} = \underbrace{\vec{r}_s \times (M\dot{\vec{r}}_s)}_{\text{orbitalny moment pędu}} + \vec{L}_s}$$

gdzie $\vec{L}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

→ własny moment pędu
moment pędu układu punktów materialnych liczony względem środka masy

Analogicznie można pokazać dla momentu sił

$$\vec{N} := \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_s + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i^{ext} =$$

$$= \vec{r}_s \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}}_{:= \vec{N}_s}$$

$$\vec{N} = \vec{r}_s \times (M\ddot{\vec{r}}_s) + \vec{N}_s$$

moment sił zewnętrznych liczony względem środka ciężkości

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{N}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_s \times (M\dot{\vec{r}}_s) + \vec{L}_s\right) = \vec{r}_s \times M\ddot{\vec{r}}_s + \frac{d}{dt}\vec{L}_s = \vec{r}_s \times (M\ddot{\vec{r}}_s) + \vec{N}_s$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_s = \vec{N}_s} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i' \times \ddot{\vec{r}}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{ext}$$

Nawet jeżeli środek ciężkości się porusza z przyspieszeniem

(3-4)

Szczególna rola środka masy

---

10 stałych ruchu

$\vec{r}_i$ – położenie punktu materialnego "i" w układzie inercjalnym $i = 1 \dots N$

Funkcja $I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots \dot{\vec{r}}_N, t)$

współrzędnych, prędkości i czasu nazywa się

"wielkością zachowywaną(ą)"

"stałą ruchu"

"całką pierwszą"

wtedy, gdy dla wszystkich trajektorii $\vec{r}_i(t)$

$$\frac{d}{dt} I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$$

"stałe ruchu" mają ogromne znaczenie dla

- zrozumienia układu punktów mech.
- rozwiązania równań ruchu

≡

<u>Definicja</u> siła zewnętrzna $\vec{F}_i^{ext}$, siły wewnętrzne $\vec{F}_{ij}$

"Układy zamknięte" $\vec{F}_i^{ext} = 0$

nie działają żadne siły zewnętrzne

Twierdzenie

"Układy zamknięte" składające się z $N \geq 2$ punktów materialnych mają conajmniej 10 stałych ruchu, pod warunkiem, że siły są zachowawcze.

(3-5)

- Pęd
- Moment pędu
- Wektor opisujący ruch środka masy
- Energia

Prawo zachowania pędu

$$\forall_i \ \vec{F}_i^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} = 0$$

Wystarczy słabsze założenie $\vec{F}^{ext} = 0$

□ $I_1(\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots, \dot{\vec{r}}_N) = \vec{p}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i(t)}_{} = const$

Całkujemy po czasie

$$\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i(t)\right] t = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t) - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(0)$$

□ $I_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i(t) \cdot t$

$$= M\vec{r}_s(t) - \vec{p}_{tot}\, t$$

Wartość tej stałej ruchu wynosi

$$M\vec{r}_s(0) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(0)$$

Znaleźliśmy więc już 6 stałych ruchu I_1 i I_2.

Zachowanie momentu pędu

Siły wewnętrzne $\vec{F}_{ij}$ — spełniają zasadę "actio=reactio"
— są skierowane wzdłuż linii $\vec{r}_i - \vec{r}_j$

Takie siły dają zerowy moment siły

zaś $\vec{N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_i^{ext}$

zamknięty system $\vec{F}_i^{ext} = 0 \quad \forall_i$

$\Rightarrow \vec{N} = 0$

$\frac{d}{dt}\vec{L}_{tot} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{tot} = \overrightarrow{const}$

$\vec{L}_{tot} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

$I_3(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots \dot{\vec{r}}_N, t) = \vec{L}_{tot} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

następne 3 wielkości

Zasada zachowania energii

W przeciwieństwie do 3 poprzednio wprowadzonych stałych ruchu, układ nie musi być zamknięty.

Warunek siły muszą być zachowawcze

$$\vec{F}_i^{ext}(\vec{r}_i) = -\nabla_i V_i^{ext}(\vec{r}_i) =$$
$$= -\left[\frac{\partial V_i^{ext}(\vec{r}_i)}{\partial t}, \frac{\partial V_i^{ext}(\vec{r}_i)}{\partial t}, \frac{\partial V_i^{ext}(\vec{r}_i)}{\partial t}\right]$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \qquad m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$$

$$\sum_i^N \int_{\vec{r}_i(t_1)}^{\vec{r}_i(t_2)} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_{\vec{r}_i(t_1)}^{\vec{r}_i(t_2)} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} m_i \dot{\vec{v}}_i(t) \cdot \vec{v}_i(t)\, dt =$$

$$= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_i}{2}\vec{v}_i^{\,2}(t)\right) dt$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^{\,2}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^{\,2}(t_2)}_{T(t_2)} - \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^{\,2}(t_1)}_{T(t_1)} =$$

$$L = \sum_i \int_{\vec{r}_i(t_1)}^{\vec{r}_i(t_2)} \Big(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \Big) \cdot d\vec{r}_i$$

Czy można wprowadzić potencjał dla sił wewnętrznych?

$$\vec{F}_{ij} = - \frac{\partial V_{ij}(r_{ij})}{\partial \vec{r}_i}$$

Jeżeli są zachowawcze

Dla wielu sił można, np. dla sił postaci

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}) = f(r_{ij}) \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$$ siły centralne

$$\vec{r}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j \qquad r_{ij} := |\vec{r}_{ij}|$$

np. siła Grawitacyjna

$$L = \sum_i^N \int_{\vec{r}_i(t_1)}^{\vec{r}_i(t_2)} \Big[- \frac{\partial V_i^{ext}}{\partial \vec{r}_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{\partial V_{ij}(r_{ij})}{\partial \vec{r}_i} \Big] \cdot d\vec{r}_i =$$

$$= - \sum_i^N \Big[V_i^{ext}(\vec{r}_i(t_2)) - V_i^{ext}(\vec{r}_i(t_1)) \Big]$$

$$- \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \Big[V_{ij}(r_{ij}(t_2)) - V_{ij}(r_{ij}(t_1)) \Big]$$

$L = R$

$$T(t_1) + \sum_{i=1}^N V_i^{ext}(\vec{r}_i(t_1)) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} V_{ij}(r_{ij}(t_1)) =$$

$$= T(t_2) + \sum_{i=1}^N V_i^{ext}(\vec{r}_i(t_2)) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} V_{ij}(r_{ij}(t_2))$$

Suma energii kinetycznej oraz potencjalnej energii sił wewnętrznych ~~oi~~ zewnętrznych jest stała, jeżeli siły są zachowawcze.

Podsumowanie

Dynamika układu N-punktów materialnych

1) $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext} := \vec{F}^{ext}$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ii} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\boxed{M\ddot{\vec{r}}_s = F^{ext}}$$

2) $\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_{Ii}^{\,2} = \frac{M}{2}\dot{\vec{r}}_s^{\,2} + \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2}$

3) $\vec{L}_{tot} := \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{Ii}\times m_i\dot{\vec{r}}_{Ii} \qquad \vec{N} := \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{Ii}\times\vec{F}_i^{ext}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}_{tot} = \vec{N}}$$

4) $\frac{d}{dt}\vec{L}_s = \vec{N}_s \rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\times\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{ext}$

5) Stała ruchu

$$I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots \dot{\vec{r}}_N, t)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

6) Odosobnione układy N-punktów materialnych ($N \geq 2$) (tzn. układy na które nie działają żadne siły zewnętrzne) mają conajmniej 10 stałych ruchu.

Równoważność masy ciężkiej i bezwładnej.

Grawitacja

Doświadczenia Galileusza wykazały, że na Ziemi wszystkie ciała spadają z równym przyspieszeniem $\vec{g}$, które nazywamy przyspieszeniem ziemskim

Dla punktu materialnego

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}) \cong \text{const}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

równanie ma postać równania Newtona jeżeli założymy

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

← siłą z jaką Ziemia działa na punkt materialny o masie m

siła grawitacyjna różni się od sił mechanicznych!

Zależy od masy punktu materialnego.

≡ Wyszliśmy z faktu doświadczalnego

$\vec{a} = \vec{g}$ dla wszystkich punktów materialnych spadających na Ziemię

Można przyjąć, że $\vec{a} = \lambda \vec{g}$

gdzie λ ewentualnie zależy od punktu materialnego

$$m\ddot{\vec{r}} = \lambda m \vec{g} = m' \vec{g}$$

gdzie $m' = \lambda m$

Zatem siła grawitacyjna wyrażałaby się następująco.

$$\vec{F}_{graw} = m' \vec{g}$$

charakterystyczna wielkość dla punktu materialnego

masa grawitacyjna

Jeżeli doświadczenia wykażą, że λ nie zależy od punktu materialnego, to można wybrać $\lambda = 1$

wtedy $\boxed{m = m'}$

Równość masy bezwładnej i grawitacyjnej jest więc też doświadczalną.

Wiele doświadczeń potwierdzających
- Galileusz spadanie ciał
- wahadło (Newton)
- doświadczenie Eötvösa potwierdziły $m = m'$ z dokładnością do 10^{-7} masy mierzonej

≡

Weźmy pod uwagę ruch względny dwóch układów odniesienia U i U'

U - układ inercjalny

U' - porusza się względem U z przyspieszeniem $\vec{a}_{tr}$, $\vec{\omega} \equiv 0$ → ruch postępowy

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_H$

Załóżmy, że w układzie inercjalnym działa na punkt siła niegrawitacyjna $\vec{F_0}$ i siła grawitacyjna $m'\vec{g}$

Równanie ruchu w układzie U:

$$m\vec{a} = \vec{F_0} + m'\vec{g}$$

i układzie U': $m\vec{a}' = \vec{F_0} + m'\vec{g} - m\vec{a}_H$

Załóżmy:
- $m' = m$ (równoważność mas)
- $\vec{g} = const$
- $\vec{a}_H = \vec{g}$ czyli układ U' spada z przyspieszeniem $\vec{g}$, czyli w jednorodnym polu grawitacyjnym

$\Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F_0}$ tzn. w układzie U' działa tylko siła $\vec{F_0}$

dla $\vec{F_0} \equiv 0 \Rightarrow \vec{a}' = 0$.

czyli punkt na który nie działa żadna siła porusza się w układzie U' ze stałą prędkością.

- W układzie U' obowiązuje zasada bezwładności chociaż nie jest układem inercjalnym.

[Przy równości obu mas nie ma mechanicznej metody rozróżnienia między układem inercjalnym a układem swobodnie spadającym w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Zasada równoważności, z której Einstein odczytał swój ogólny postulat względności.

Prawo powszechnego ciążenia (sformułowanie Newtona) wszystkie ciała materialne przyciągają się nawzajem

$$\vec{F}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \varkappa m_1 m_2 \qquad \vec{r}_{12} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad r_{12} = |\vec{r}_{12}|$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad \varkappa\,(G) = 6.6720 \pm 0.0006 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{g\,s^2}$$

stała grawitacyjna

Ruch punktu materialnego o zmiennej masie

Masa punktu zmienia się $m = m(t, \vec{v})$

dm przyrost masy w czasie $[t, t+dt]$

$\vec{w}$ – prędkość masy dm względem układu związanego z punktem materialnym (i poruszającym się wraz z nim ruchem postępowym wobec układu inercjalnego)

Prędkość masy dm względem układu inercjalnego, w którym opisujemy ruch $\vec{v} + \vec{w}$

$\vec{v}$ – prędkość w ruchu inercjalnym

$d\vec{p}$ – przyrost pędu ($\vec{p} = m\vec{v}$) punktu materialnego w przedziale $[t, t+dt]$

będzie równy sumie

1) popędu siły zewnętrznej w przedziale czasu $[t, t+dt]$
2) pędu przenoszonego przez masę dm $dm(\vec{v}+\vec{w})$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt + dm(\vec{v}+\vec{w})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}+\vec{w})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \underbrace{\frac{dm}{dt}\vec{w}}_{\text{siła powstająca w wyniku zmiany masy}}}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \dot{m}\vec{w}$$

Przykład rakieta:

gazy dają odrzut wypływający przez dyszę rakiety z prędkością $\vec{w} = \text{const}$ w ilości $\varrho = \text{const}$ na jednostkę czasu $\dot{m} = -\varrho$

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \varrho\vec{w}}$$ w polu grawitacyjnym Ziemi

W. Rubinowicz, W. Królikowski str 135