WYKŁAD 2 & 2a

Dynamika punktu materialnego

Zasady Newtona (Isaac Newton (1642–1727)
"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"
(1687)

Pierwsze prawo ruchu, zasada bezwładności

Istnieje układ odniesienia, w którym punkt materialny porusza się bez przyspieszenia (tzn. jednostajnie i prostoliniowo) gdy 'nic' z zewnątrz na niego nie działa.

Definicja
- Układ inercjalny ≡ układ, w którym obowiązuje zasada bezwładności

* Zasada bezwładności postuluje istnienie układu inercjalnego.

PYTANIE: Czy istnieją inne układy inercjalne?

Twierdzenie

$$\left(\begin{array}{c} U \text{ i } U' \\ \text{układy inercjalne} \end{array}\right) \iff \left(\vec{\omega} = 0 \quad \vec{a}_{tr} = 0\right)$$

$$(\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a}\,' = 0)$$

czyli układ U' porusza się względem U ruchem postępowym bez przyspieszenia

---

- Zasada bezwładności stwarza podstawy podziału wszystkich możliwych układów odniesienia na dwie klasy:

✓ układów, w których zasada ta obowiązuje
✓ układów, w których zasada ta nie jest ważna

Formułując prawa mechaniki będziemy w dalszym ciągu zakładać, że układ, w którym rozważamy ruchy punktów lub ciał materialnych (mechanicznych), jest inercjalny.

Przekształcenie Galileusza

wiąże położenie punktu P w dwu układach inercjalnych U i U', odpowiednio $\vec{r}$ i $\vec{r}\,'$

U, U' inercjalne $\Rightarrow$ $\vec{\omega}=0$ $\vec{a}_{tr}=0$

prędkość unoszenia $\vec{v}_0 = \vec{v}_{tr} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' = \vec{v}_{tr} = const$

ponieważ $\frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} = 0$

$$\vec{v}_{tr} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0 = const$$ || całkujemy po czasie od t_1 do t

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t_1) + \vec{v}_0(t-t_1)$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{r}\,' \rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_0(t_1) - \vec{v}_0(t-t_1)}$$

Jeżeli w chwili t_2 środki układów pokrywały się, tzn $\vec{r}\,'(t_2) = \vec{r}(t_2)$

$$\vec{r}_0(t_1) = -\vec{v}_0(t_2 - t_1)$$

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}_0(t-t_2)}$$

Jeżeli weźmiemy $t_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}_0 t}$

Drugie prawo ruchu Newtona

Jeżeli punkt materialny o masie m posiada przyspieszenie $\vec{a}$, to mówimy, że działa na niego siła $\vec{F} = m\vec{a}$

Drugie prawo ruchu Newtona

„Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona”.

Równania Newtona

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$$

$\vec{F}$ – traktujemy jako funkcję daną.
Znajomość tej funkcji w każdym wypadku pochodzi z doświadczenia.
$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

$$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gdzie $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

Równania ruchu w układzie nieinercjalnym

(poruszającym się z przyspieszeniem lub obracającym się, $\vec{a}_{tr} \neq 0$ albo/i $\vec{\omega} \neq 0$)

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} \underbrace{- m\vec{a}_{tr} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' - m2\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}_{\text{tzw siły bezwładności}}}$$

realna siła działająca na punkt materialny (wywierana na punkt materialny przez otoczenie)

układ z $\vec{a}_{tr} \neq 0$ albo/i $\vec{\omega} = 0$ nie jest układem inercjalnym

Układy wielu punktów materialnych

Rozważamy układy, które składają się z $N \geq 2$ punktów materialnych.

Masa i siła

Rozważmy w <u>układzie inercjalnym</u> jakiekolwiek urządzenie mechaniczne, które nadaje przyspieszenia ciałom materialnym (punktom materialnym)

Przyrząd nadaje punktom $P_1, P_2, \ldots P_n$
przyspieszenia $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$
o tym samym kierunku i zwrocie

Można znaleźć taki układ stałych liczb o jednakowym znaku m_i
(określony z dokładnością do dodatniej stałej proporcjonalności), że będzie

$$m_1\vec{a}_1 = m_2\vec{a}_2 = \ldots = m_n\vec{a}_n \ldots$$

Umawiamy się, że będziemy przyjmować m_i $(i=1, \ldots n)$ zawsze dodatnie

<u>Rozważmy inne urządzenie</u>, które nadaje tym samym punktom
przyspieszenia $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \ldots \vec{a}_n'$

Istnieją liczby m_i':

$$m_1'\vec{a}_1' = m_2'\vec{a}_2' = \ldots = m_n'\vec{a}_n'$$

Przyjmijmy za fakt zgodny z doświadczeniem, że możemy położyć $m_i = m_i'$

Czyli drugie urządzenie produkuje przyspieszenia ~~takie~~, że

$$m_1\vec{a}_1' = m_2\vec{a}_2' = \ldots m_n\vec{a}_n'$$

Liczba $m_i > 0$ • nie zależy od przyrządu !
• zależy od punktu materialnego

nazywamy ją masą, dokładnie masą bezwładną punktu materialnego

• Masa m jest określona z dokładnością do dodatniego współczynnika
Wartość liczbowa masy punktu będzie zatem zależeć od wyboru jej jednostki.

Niech masa punktu P_1 będzie jednostką, $m_1 = 1$
Wówczas przyspieszając punkt P_1 i punkt P przy pomocy urządzenia mechanicznego otrzymujemy odpowiednie przyspieszenia $\vec{a}_1$ i $\vec{a}$

$$\vec{a}_1 = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{m = \frac{a_1}{a}}$$

Dla danego przyrządu przyspieszającego iloczyn masy i przyspieszenia jest stałym wektorem.
• Wektor ten nazywamy siłą przyrządu przyspieszającego $\vec{F}$ (od łacińskiego słowa fors) $\vec{F} = m\vec{a}$
* $m\vec{a}$ nie zależy od punktu materialnego
• niezależność m od urządzenia przyspieszającego → masa bezwładna

☒ Punkty materialne mogą być przyspieszane nie tylko przez urządzenia mechaniczne

Zawsze iloczyn $m\vec{a}$ zależy wtedy od własności fizycznych punktu materialnego (ładunek elektryczny, moment magnetyczny)

Jeśli punkt materialny posiada przyspieszenie $\vec{a}$, to mówimy, że działa na niego siła $\vec{F} = m\vec{a}$ ← przyspieszenie

masa bezwładna

Drugie prawo ruchu Newtona

"Zmianą ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona".

Równania Newtona

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}$$

$\rightarrow \vec{r}(t)$

$\vec{F}$ nazywamy polem siły

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

$$p(t) - p(t_0) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt}_{\text{popęd siły } \vec{F} \text{ w przedziale } \langle t_0, t\rangle}$$

$\boxed{\text{przyrost pędu} = \text{popęd}}$

Zasada zachowania pędu

$$\boxed{\vec{F} = 0 \implies \vec{p} = \text{const}}$$

Siły zachowawcze i potencjały

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \qquad \vec{r}(t), \vec{v}(t)$$

Nie istnieją siły, które zależą od przyspieszenia! (Mówimy o układzie inercjalnym)

$$dW = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \cdot d\vec{r}$$

praca siły $\vec{F}$ na infinitezymalnym odcinku drogi

Praca wzdłuż skończonej krzywej C = suma prac na infinitezymalnych odcinkach.

- Całki po krzywej C, jako parametr używamy często czasu t

$$\boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} F(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \cdot \vec{v}(t)\, dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)\, dt$$

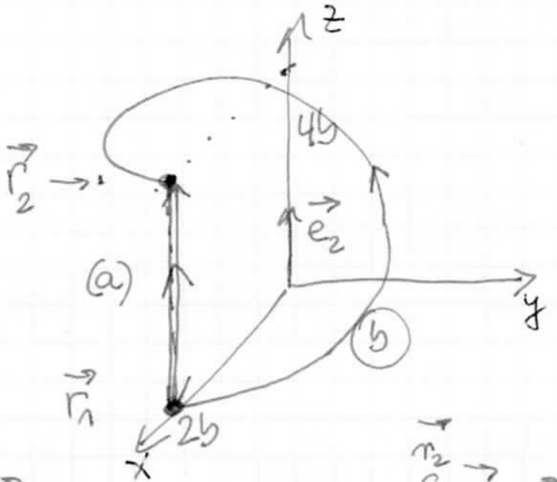
Przykład

Całka po krzywej, dla dwóch różnych dróg

Siła $\vec{F} = (y, x^2/2b, x+z)N$ przesuwa ciało pomiędzy punktami $\vec{r}_1 = (2b, 0, 0)$ i $\vec{r}_2 = (2b, 0, 4b)$

(a) po linii prostej równoległej do osi z

(b) po linii śrubowej, której oś pokrywa się z osią z



a) $d\vec{r} = \vec{e}_2 dz$ $\quad W_a = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{4b} \vec{F} \cdot \vec{e}_2 dz$

$$W_a = \int_0^{4b} N(2b + z)\,dz = N\left(2b z + \frac{1}{2}z^2\right)\Big|_0^{4b} = N 16 b^2$$

b) Parametryczne przedstawienie linii śrubowej

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b\cos\varphi \\ 2b\sin\varphi \\ 4b \cdot \frac{\varphi}{2\pi} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \varphi = 0 & \vec{r}(0) = \vec{r}_1 \\ \varphi = 2\pi & \vec{r}(2\pi) = \vec{r}_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow W_b = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} N \begin{pmatrix} 2b\sin\varphi \\ 2b\cos^2\varphi \\ 2b\cos\varphi + 2b\frac{\varphi}{\pi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2b\sin\varphi \\ 2b\cos\varphi \\ 2b/\pi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= N b^2 (8 - 4\pi)$$

$$W_a \neq W_b$$

Przykład 2

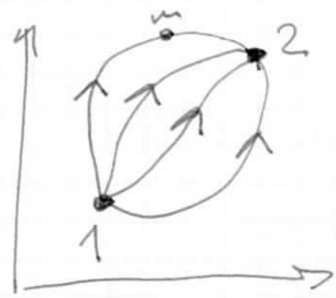
Praca siły Lorentza $(\vec{E} \equiv 0, \vec{B} \neq 0)$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} q\left[\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}(t))\right] \cdot \vec{v}(t)\,dt = 0$$

Mamy siły, których praca zależy od drogi (2-7)
Przykład 2

- Mamy siły tzw. konserwatywne (zachowawcze), dla których praca nie zależy od przebytej drogi pomiędzy dwoma punktami



- Siła potencjalna $\vec{F}$

Mówimy, że siła jest potencjalna, jeżeli istnieje taka funkcja (jednoznaczna) $V(\vec{r}, t)$, że

$$\boxed{\vec{F} = -\,\mathrm{grad}\, V = -\nabla V = -\left(\vec{e}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}\right)}$$

← znak „−" to konwencja, nie ma znaczenia fizycznego

- Widzimy, że siła potencjalna może być tylko funkcją położenia i czasu $F(\vec{r}, t)$

- Siły zależne od prędkości nie mogą być potencjalne
  można wprowadzić potencjał ~~[illegible]~~ uogólniony

□ Jeżeli potencjał nie zależy od czasu, tzn. $V(\vec{r})$, to mówimy, że siła $\vec{F} = -\,\mathrm{grad}\, V(\vec{r})$ jest zachowawcza (konserwatywna) a $V(\vec{r})$ nazywamy energią potencjalną (potencjałem) punktu materialnego $\vec{r}$ w polu siły $\vec{F}(\vec{r})$

Wtedy, jak wiadomo z analizy wektorowej, $\int F(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ jest niezależna od drogi pomiędzy dwoma punktami

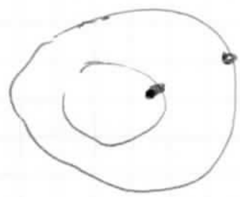
Przykład potencjału

Potencjał siły elastycznej:
Siła dana przez $\vec{F} = -\varkappa^2 \vec{r}$

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r_0}) = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \nabla V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r_0}(L)}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(L) ← po linii łączącej dwa punkty

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r_0}) + \varkappa^2 \int_{\vec{r_0}(L)}^{\vec{r}} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$



$$= V(\vec{r_0}) + \varkappa^2 \int_{r_0}^{r} d\left(\frac{r^2}{2}\right)$$

$$= V(\vec{r_0}) + \varkappa^2 \frac{r^2}{2} + \text{const} = \frac{\varkappa^2}{2} r^2 + \text{const}$$

Zasada zachowania energii

II-zasada Newtona $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$

$$\int_{1,C}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}(t) \cdot \vec{v}(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} v^2(t)\right) dt$$

$$\int_{1,C}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{m}{2} v^2(t_2) - \frac{m}{2} v^2(t_1) = T(t_2) - T(t_1)$$

gdzie $T := \frac{m}{2} v^2$ – energia kinetyczna poruszającego się punktu materialnego

Praca wykonana przy ruchu punktu jest wykorzystana do zmiany energii kinetycznej

≡ Dla sił zachowawczych

$$\int_{1,C}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{1,C}^{2} \nabla V \cdot d\vec{r} = V(\vec{r_1}) - V(\vec{r_2})$$

$$\boxed{T + V_1 = T + V_2}$$ gdzie $V_i := V(\vec{r_i})$

Dla sił zachowawczych suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała.

Przy danej sile $\vec{F}$, $V(\vec{r})$ jest określone (2-9)
z dokładnością do addytywnej stałej

Dla sił zachowawczych

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla V(\vec{r})\cdot dr = -\left[V(\vec{r}_2)-V(\vec{r}_1)\right]$$

Inne kryteria, kiedy siła jest zachowawcza

(1) $\left(\vec{F} \text{ jest zachowawcza}\right) \Leftrightarrow$ $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$

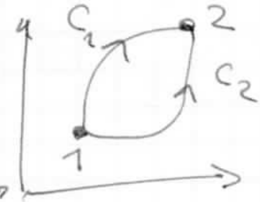
$$\oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$$

dla każdej krzywej zamkniętej.

(2) $\left(\vec{F} \text{ jest zachowawcza}\right) \Leftrightarrow$ $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$
i $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{F}(\vec{r}) = 0$

Dowód 1

$$\oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{1,C_1}^{2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_{2,-C_2}^{1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$



$$\int_{1,C_1}^{2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\int_{2,-C_2}^{1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{1,C_2}^{2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Dowód 2 $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\times\nabla V(\vec{r}) = (0,0,0)$$ z przemienności drugich pochodnych

$\nabla\times\vec{F}(\vec{r}) = 0$ Twierdzenie Stokesa

$$0 = \iint_A \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Obszar jednospójny R:
na każdej krzywej zamkniętej przebiegającej w R
daje się rozpiąć powierzchnię S całkowicie leżącą
w obszarze R

4 zasada Newtona

opisana przez Newtona w Principiach
(na tyle oczywista, że często pomijana)

Zasada niezależności sił

- Gdy poszczególne siły $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots \vec{F}_n$ działają na punkt materialny o masie każda działa oddzielnie ~~na punkt o masie m~~

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_1 \; ; \; m\vec{a}_2 = \vec{F}_2 \quad \dots \quad m\vec{a}_n = \vec{F}_n$$

$$m\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

- PYTANIE: Jak wygląda równanie ruchu, gdy siły działają jednocześnie na punkt materialny m

Jest faktem empirycznym, że przyspieszenie masy m jest równe $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i$

a zatem, na podstawie definicji siły, wektor $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$ jest siłą działającą na punkt materialny, którą nazywamy siłą wypadkową.

Zasada niezależności sił ~~została sformułowana~~
- jest niezależna od praw ruchu
- ma pochodzenie empiryczne.

Co opuściliśmy? 1, 2, 4 zasada

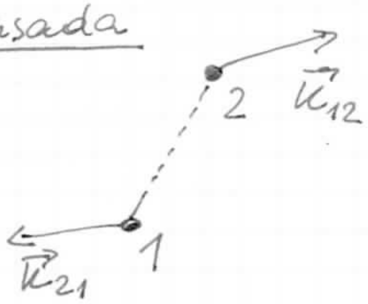
Trzecia zasada dynamiki Newtona

Dwa ciała

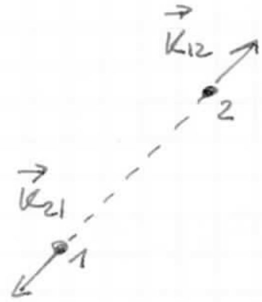
Jeżeli ciało 1 działa na ciało 2 siłą $\vec{F}_{21}$, to ciało 2 działa na ciało 1 siłą $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

"Akcja = Reakcja" $\boxed{\text{"actio" = "reactio"}}$

3 Zasada



Czasami dodatkowe założenie o siłach $\vec{K}_{ij}$



$$(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times \vec{K}_{12} = 0$$

Siły pomiędzy dwoma punktami są równoległe do linii łączącej te punkty.

Siły centralne!

Przykład siła Grawitacyjna $\vec{F}_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^3}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$

Układy wielu punktów materialnych

mamy $N \geqslant 2$ punkty materialne

m_i – masa punktu i $\qquad M=\sum_{i=1}^{N} m_i$ – całkowita masa

$\vec{F}_i$ – siła działająca na punkt "i"

$\vec{F}_i^{ext}$ – zewnętrzna siła działająca na punkt "i"

$\vec{F}_{ij}$ → siła z jaką "j" punkt działa na punkt "i"

$$\vec{F}_{ii} \equiv 0$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Dla każdego punktu równanie Newtona $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + (\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}) + \dots =$$

$$= (\vec{F}_{12} - \vec{F}_{12}) + (\vec{F}_{13} - \vec{F}_{13}) + (\vec{F}_{23} - \vec{F}_{23}) + \dots = 0$$

"actio = reactio"

$$\boxed{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext} =: \vec{F}^{ext}} \qquad (2\text{-}12)$$

- Pochodna czasowa całkowitego pędu jest równa sumie wszystkich sił zewnętrznych.
- Siły wewnętrzne mogą zmienić pęd pojedynczego punktu materialnego, ale nie pęd całkowity.

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ii}}$$

$\{\vec{r}_{Ii}\}$ → położenie punktu "i" w układzie inercjalnym

gdzie $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

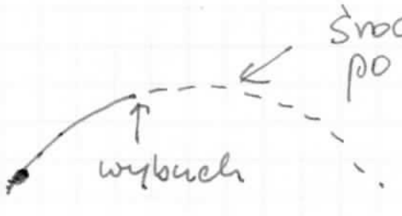
środek masy (ciężkości)

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_{Ii}} = M\dot{\vec{r}}_s$$

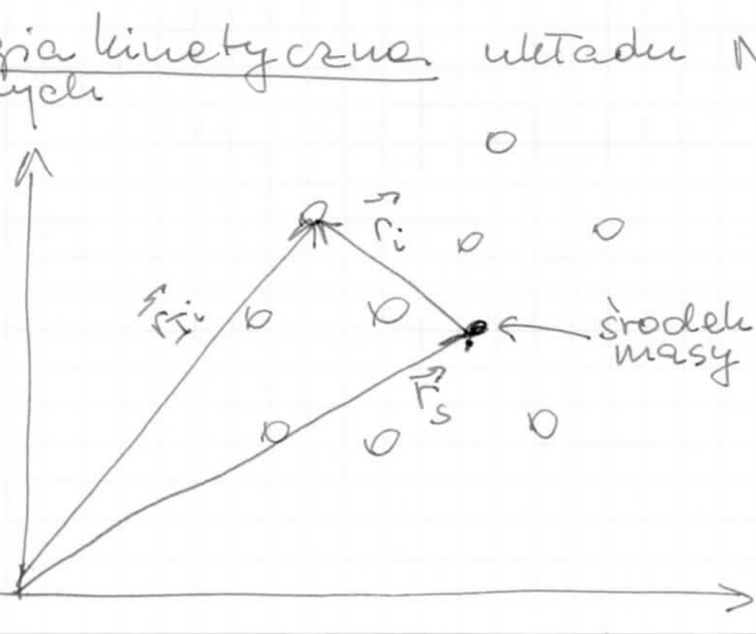
! Pęd całkowity układu punktów materialnych = Pęd środka masy

$$\boxed{M\ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}^{ext}}$$

<u>Przykład</u>: rzucany granat



<u>Energia kinetyczna</u> układu N punktów materialnych



$$\vec{r}_{Ii} = \vec{r}_s + \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_{Ii} = \vec{r}_s + \vec{r}_i \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

$$\dot{\vec{r}}_{Ii} = \dot{\vec{r}}_s + \dot{\vec{r}}_i \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = 0$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_{Ii}^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_s + \dot{\vec{r}}_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{r}}_s^{\,2} + 2\dot{\vec{r}}_s \cdot \dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \right) =$$

$$= \frac{\dot{\vec{r}}_s^{\,2}}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) + \dot{\vec{r}}_s \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i}_{0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

$$= \underbrace{\frac{M \vec{V}_s^{\,2}}{2}}_{\text{energia kinetyczna środka masy}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

Energia kinetyczna środka masy jest tylko częścią energii kinetycznej (całkowitej).

$\boxed{\text{WYKŁAD 3 § 3a} \quad 24 \text{ III } 2010}$

Całkowity moment pędu (3-1)

$$\vec{L}_{tot} := \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ii} \times \dot{\vec{r}}_{Ii}$$

Przy założeniu, że $m_i = \text{const}$

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \dot{\vec{r}}_{Ii} \times \dot{\vec{r}}_{Ii} + m_i \vec{r}_{Ii} \times \ddot{\vec{r}}_{Ii} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{Ii} \times \ddot{\vec{r}}_{Ii} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_i$$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_{Ii} = \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^{N} F_{ij} \right)$$

Moment siły $\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_i^{ext} := \vec{N}$

Co z członem $\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} \vec{r}_{Ii} \times \vec{F}_{ij}$