WYKŁAD 15 & 15a 25.05.2010 & 27.05.2010

Podstawowe wielkości teorii relatywistycznej

Czterowektory $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (\vec{w}, w_4)$

Iloczyn skalarny w przestrzeni Minkowskiego

$$w \cdot v = \sum_{i=1}^{3} w_i v_i - w_4 v_4$$

Λ – transformacja Lorentza $\quad \Lambda = \Lambda_R \Lambda_B$

$w \cdot v = (\Lambda w) \cdot (\Lambda v)$ ← niezmienniczość iloczynu skalarnego względem transformacji Lorentza

Definicja czterowektora:
Przy przejściu od jednego układu inercjalnego S do drugiego S' współrzędne czterowektorów transformują się zgodnie z transformacją Lorentza $w' = \Lambda w$

- Poznaliśmy do tej pory: czterowektor położenia

$$x = (\vec{x}, ct)$$

☒ Do opisu relatywistycznej dynamiki potrzebujemy określić
- masę
- czteroprędkość
- czteropęd

Dwie różne definicje masy!
(a) masa niezmiennicza
(b) masa zależna od prędkości

Definicja masy niezmienniczej

Przyjmujemy, że masą ciała m jest jego masa spoczynkowa, niezależnie od tego, jak szybko się to ciało porusza.

Czas własny cząstki materialnej

Położenie cząstki $\vec{x}(t)$ w chwili t w trójprzestrzeni określa nam punkt $x = (\vec{x}(t), ct)$ w czasoprzestrzeni.
Zmianom położenia ciała w trójprzestrzeni w funkcji t odpowiada krzywa w czasoprzestrzeni, którą nazywamy linią świata cząstki.

Przypuśćmy, że w przedziale czasu od t do $t+dt$ cząstka materialna przemieszcza się ~~od~~ z punktu $\vec{x}$ do punktu $\vec{x}+d\vec{x}$
Rozważmy czterowektor przemieszczenia

$$dx = (d\vec{x}, cdt) = (\vec{v}, c)dt$$

W układzie spoczynkowym cząstki mamy $d\vec{x} = 0$

$$dx = (0, 0, 0, cdt)$$

czterowektor ma tylko współrzędną czasową
Takie wektory nazywamy wektorami czasowymi
(Dokładnie takie, ~~w których istnieje~~ które mają tylko składową czasową w jakimś układzie inercjalnym)

$$dx^2 < 0$$

Przyjmujemy postać $dx_0 = (0, 0, 0, cdt_0)$
indeks "0" oznacza układ spoczynkowy
czas dt_0 jest czasem własnym między dwoma punktami na linii świata.
Aby znaleźć ten czas nie trzeba przechodzić do układu spoczynkowego cząstki.
W każdym innym układzie, czterowektor różnicy położeń między punktami ma postać $dx = (\vec{v}dt, cdt)$

$$dx_0^2 = dx^2$$

$$-c^2 dt_0^2 = (v^2 - c^2)dt^2 \quad \Rightarrow \quad dt_0 = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma(v)}$$

znany czynnik obliczony dla prędkości cząstki
właściwie wzór na dylatację czasu
dt_0 jest skalarem Lorentzowskim, niezmiennikiem transformacji Lorentza

Czteroprędkość

$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ – prędkość trójwymiarowa cząstki transformuje się w skomplikowany sposób

$$\boxed{u := \frac{dx}{d\tau} = \left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}, c\frac{dt}{d\tau}\right)},$$

u jest czterowektorem
dx – czterowektor
$d\tau$ – skalar Lorentzowski

$$u = \gamma\left(\frac{d\vec{x}}{dt}, c\frac{dt}{dt}\right) = \gamma(\vec{v}, c)$$

Uwaga: trójprędkość $\vec{v}$ nie jest przestrzenną składową czteroprędkości

Relatywistyczne wyrażenie na pęd

- chcemy, żeby relatywistyczna definicja pędu zgadzała się z nierelatywistyczną. ($\vec{p} = m\vec{v}$) dla prędkości nierelatywistycznych $|\vec{v}| \ll c$
- Chcemy, żeby całkowity moment pędu układu izolowanego był zachowany.

To powinno obowiązywać we wszystkich układach odniesienia

$$\boxed{p = mu = (\gamma m\vec{v}, \gamma mc)}$$

$p = (\vec{p}, p_4)$
$\vec{p} := m\vec{u} = \gamma m\vec{v}$
definicja trójpędu w mechanice relatywistycznej

dla $|\vec{v}| \ll c$ pokrywa się z definicją pędu w mechanice klasycznej

---

Niektórzy fizycy wprowadzają masę zależną od prędkości $m_{zm} = \gamma(v)m$ (Również pisane $m = \gamma(v)m_0$)

m_0 – masa spoczynkowa

Obecnie nie jest to popularne podejście!

wtedy trójpęd $\vec{p} = m_{zm}\vec{v}$

Energia jako czwarta składowa pędu

Definicja relatywistycznej energii

Energia E swobodnie poruszającego się ciała o czteropędzie $p = (\vec{p}, p_4)$ jest równa $E = p_4 c = \gamma m c^2$

$$\boxed{p = \left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right)}$$ czterowektor energii-pędu

Dla $v \ll c$ $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots$

$$\rightarrow E \simeq \underbrace{mc^2} + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$$

Energia spoczynkowa ciała

Zdefiniujmy energię kinetyczną $T = E - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2$

Użyteczne związki między

$m, \vec{v}, \vec{p}$ i E

$p = \gamma m (\vec{v}, c) = \left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right)$

$\gamma m \vec{v} = \vec{p}$; $\gamma m c = \frac{E}{c}$; $\Rightarrow \gamma = \frac{E}{mc^2}$

$$\boxed{\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p} c}{E}}$$

pozwala wyznaczyć prędkość cząstki, jeżeli znamy jej pęd i energię.

$$\boxed{p \cdot p = -(mc)^2}$$ w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia

$$\Downarrow \quad \vec{p}^{\,2} - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = -(mc)^2 \implies \boxed{E^2 = (mc^2)^2 + (\vec{p} c)^2}$$

Pojęcie siły w teorii względności

- Ograniczymy rozważania do sił nie zmieniających masy spoczynkowej ciała, na które działają
(Np. siła Lorentza $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$)

Postulujemy najprostszą postać równań ruchu
- zgodną z zasadą względności Einsteina
- przechodzącą w równania Newtona mechaniki nierelatywistycznej dla $\frac{v}{c} \ll 1$

Postulujemy więc równania ruchu punktu materialnego w mechanice relatywistycznej

$$\boxed{\frac{dp}{d\tau_0} = K}$$

$$K = (K_1, K_2, K_3, K_4)$$

czterosiła

$$K = (\vec{K}, K_4)$$

$$(d\tau_0 \equiv dt_0)$$

$$\frac{dp}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} mu = \frac{d}{dt_0} m \frac{dx}{dt_0} = m\frac{d^2x}{dt_0} = K$$

$$\frac{d}{dt} m \frac{dx}{dt_0} = K \cdot \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m \vec{v}, \gamma c m\right) = \left(\vec{K}, K_4\right)\frac{1}{\gamma}$$

część przestrzenna $\quad \frac{d\vec{p}}{dt} \leftarrow$ trójpęd $\quad = \frac{\vec{K}}{\gamma} =: \vec{F}$

biorąc trójsiłę jako $\vec{K} = \gamma \vec{F}$

otrzymujemy równanie $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$ $\quad \frac{d}{dt}\left(m\gamma\vec{v}\right) = \vec{F}$

$\downarrow$

otrzymujemy równ. Newtona mechaniki nierelatywistycznej

$\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow \gamma \approx 1$

część czasowa

$$\frac{d}{dt}(\gamma c m) = \frac{K_4}{\gamma}$$

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{K_4}{\gamma}$$

$$E^2 = (mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2$$

$$E\frac{dE}{dt} = c^2 \vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = c^2\vec{p}\cdot\vec{F} \rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{c^2\vec{p}}{E}\cdot\vec{F} = \vec{v}\cdot\vec{F}$$

$$K_4 = \gamma\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = \gamma\frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{F}$$

$$\boxed{K = \gamma\left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right) = \gamma\left(\vec{F}, \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{F}\right)}$$

Pamiętając, że $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ otrzymujemy $dE = d\vec{x}\cdot\vec{F}$

Ponieważ $E = mc^2 + T$ $\quad \boxed{dT = d\vec{x}\cdot\vec{F}}$

uogólniony związek na przypadek relatywistycznych energii i sił

Energia potencjalna

Może się zdarzyć, że przynajmniej w jednym układzie odniesienia S siła $\vec{F}$ jest gradientem funkcji $U(\vec{x})$ $\quad \vec{F} = -\nabla U(\vec{x})$ i siła jest zachowawcza

$$\vec{F}\cdot d\vec{x} = -\nabla U(\vec{x})\cdot d\vec{x} = -dU$$

Widzimy więc, że $dT = -dU \Rightarrow \boxed{d(T+U) = 0}$

Dokładnie tak samo, jak w mechanice nierelatywistycznej. Jeśli siła działająca na ciało jest zachowawcza, to $T+U$ jest wielkością zachowaną.

≡

Część czasowa czterosiły, jest zależna od części przestrzennej $K_4 = \gamma \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{F}$

wynika to z faktu, że $p \cdot p = mu \cdot mu = -m^2c^2$

Jeżeli $\vec{F} = 0 \Rightarrow \underset{\text{czterosiła}}{K} = 0$

zachodzi zatem $\frac{d^2 x}{dt_0^2} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} = 0$

$\Rightarrow \gamma \vec{v} = \overrightarrow{const} \Rightarrow \vec{v} = const$

$\left(\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \Rightarrow \vec{a} = 0$

zachodzi również odwrotnie z $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0$.

Równania Lagrange'a II rodzaju w mechanice relatywistycznej

$$\boxed{\frac{d}{dt} \gamma m \vec{v} = \vec{F}}$$

(swobodnego)

Dla punktu materialnego w polu siły o potencjale $V(q, t)$ lub potencjale uogólnionym $U(q, \dot{q}, t)$ w mechanice relatywistycznej mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \qquad l = 1, 2, 3$$

gdzie $L = S - V$ lub $L = S - U$

przy czym $S = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$q = (q_1, q_2, q_3)$

$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$

Równania są niezmiennicze względem przekształceń zmiennych uogólnionych.

W związku z tym wystarczy pokazać ich słuszność przy użyciu współrzędnych kartezjańskich

$$q_j = x_j \qquad v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial S}{\partial \dot{x}_j} = -mc^2 \frac{1\,(-2)\,\dot{x}_j/c^2}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma \dot{x}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \qquad X_j \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_j}$$

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{x}_j) + \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{x}_j) = X_j}$$

Równania Newtona (relatywistyczne)

Dla małych prędkości

$$S = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right) \cong -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots$$

$$L = S - V \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - V = T_{nr} - V$$

Pędy uogólnione w mechanice relatywistycznej

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_l} = -mc^2 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\frac{v^2}{2}$$

W mechanice nierelatywistycznej mieliśmy

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = m\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\frac{v^2}{2}$$

$$m \xrightarrow[\text{relatywistyczna}]{\text{mechanika}} m\gamma$$

Mamy relację

$$S + E = -mc^2\frac{1}{\gamma} + m\gamma c^2 = mc^2\gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$
$$= mc^2\gamma\left(1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}\right) = m\gamma v^2$$

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \rightarrow \vec{p}\cdot\vec{v} = m\gamma v^2 \Rightarrow S + E = \vec{p}\cdot\vec{v}$$

Hamiltonian (funkcja Hamiltona w mechanice ~~nie~~relatywistycznej)

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \vec{p}\cdot\vec{v} - S + V = E + V$$

$$E = c\sqrt{(m\gamma\vec{v})^2 + (mc)^2} = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$$

czyli mamy

$$\boxed{H = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} + V(\vec{r}, t)}$$

Jeżeli potencjał nie zależy od czasu explicite, wtedy H jest stałą energią punktu materialnego