Mechanika relatywistyczna

Istota względności

Większość pomiarów fizycznych jest wykonywana względem wybranego układu współrzędnych.

Położenie cząstki $\vec{r} = (x, y, z)$ względem układu O

~~czas~~
Zdarzenie nastąpiło w chwili t
tzn po upływie czasu t od chwili $t_0 = 0$

Energia kinetyczna cząstki zależy w jakim układzie ją mierzymy

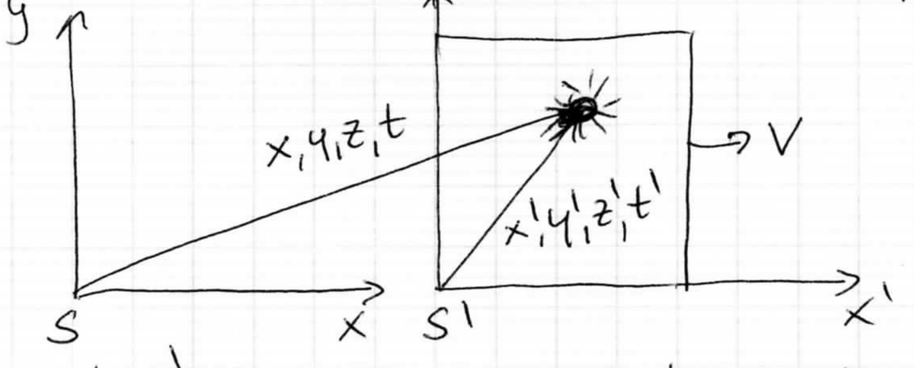
⇒ Względność pomiarów.

Co wiemy do tej pory?
Prawa Newtona obowiązują w tzw. inercjalnych układach odniesienia.

Każdy z układów porusza się ze stałą prędkością względem dowolnego innego układu inercjalnego.

Prawa Newtona są niezmiennicze przy przejściu od jednego układu inercjalnego do innego.

Transformacja Galileusza – opisuje transformację współrzędnych pomiędzy dwoma układami inercjalnymi.



Układ S' porusza się względem układu S ze stałą prędkością skierowaną wzdłuż osi x.
Oś x' jest równoległa do osi x

Podstawowe założenie mechaniki newtonowskiej

<u>Istnieje uniwersalny czas.</u>

Jeżeli więc obserwatorzy w układach S i S' zsynchronizowali zegary (i umówili się, że będą stosować tę samą jednostkę czasu) to $t' = t$.

Możemy także wybrać początki układów O i O' w taki sposób, że będą pokrywać się w chwili $t = ~~t_0~~$

Matematyczny związek między współrzędnymi (x, y, z, t) i (x', y', z', t') → transformacja Galileusza

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r} - \vec{V}t \\ t' &= t \end{aligned}}$$

To nie jest najogólniejsza transformacja Galileusza

1) Możemy ~~[illegible]~~ dokonać obrotu osi (opisanego przez R)
2) Możemy ~~prze~~ rozsunąć środki układów S i S' od siebie i tak wybrać szczególną chwilę czasu.

Posługując się transformacją Galileusza możemy natychmiast podać związek między prędkościami ciała względem każdego z układów

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ jest prędkością w układzie S

$\vec{v}\,'(t) = \dot{\vec{r}}\,'(t)$ jest prędkością w układzie S'

$$\boxed{\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}}$$

$\left.\begin{matrix} \vec{F}, & m, & \vec{a} \\ \vec{F}', & m', & \vec{a}\,' \end{matrix}\right\}$ mierzone w obu układach są identyczne

w sposób oczywisty $\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F}' = m\vec{a}\,'$

Druga zasada dynamiki jest niezmiennicza względem transformacji Galileusza.

Podobnie jest z I i III zasadą dynamiki

Teoria względności Galileusza a prędkość światła

Prawa dynamiki Newtona są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.
Prawa elektromagnetyzmu (prawa Maxwella) nie są niezmiennicze.

Jak można się o tym przekonać?

Z równań Maxwella wynika, że światło (dowolna fala elektromagnetyczna) rozchodzi się w próżni we wszystkich kierunkach z prędkością $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \, m/s$

przenikalność elektryczna i magnetyczna próżni.

Jeżeli prawa Maxwella obowiązują w pewnym układzie S to światło musi się poruszać względem tego układu we wszystkich kierunkach z prędkością c.

Jeżeli układ S' porusza się z prędkością V względem układu S wzdłuż osi x i wiązka światła biegnie w tym samym kierunku to jej prędkość w układzie S' będzie równa

$$v' = c - V$$

Jeżeli wiązka światła biegnie w lewo to jej prędkość w układzie S będzie równa c a w układzie S' $c + V$

Jeżeli założymy, że transformacja Galileusza jest mimo wszystko właściwą transformacją wiążącą układy inercjalne, to w nieunikniony sposób dochodzimy do wniosku, że równania Maxwella mogą obowiązywać w jednym szczególnym układzie inercjalnym (zwanym eterem).

Fizyka klasyczna

(*) (Transformacja Galileusza pomiędzy układami inercjalnymi) $\Longleftrightarrow$ (Prawa Newtona prawdziwe we wszystkich układach inercjalnych. Równania Maxwella prawdziwe tylko w jednym (eteru))

Doświadczenia Michelsona - Morleya

Albert Michelson (1852-1931)
Edward Morley (1938-1923)

Prędkość światła na Ziemi nie zależy od kierunku rozchodzenia się światła.

sprzeczność z (*)

Postulaty szczególnej teorii względności (A. Einstein)

- Definicja ~~układu~~ inercjalnego układu odniesienia

Układem inercjalnym jest dowolny układ odniesienia (zbiór współrzędnych x, y, z, t), w których wszystkie prawa fizyki obowiązują w ich zwykłej postaci.

- Pierwszy postulat teorii względności

Jeśli S jest ~~układem~~ inercjalnym układem odniesienia i inny układ odniesienia S' porusza się względem S ze stałą prędkością, to S' jest także układem inercjalnym.

- Drugi postulat szczególnej teorii względności

Prędkość światła (w próżni) ma taką samą wartość $c = 299792458$ m/s we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od kierunku propagacji

Wyraża wynik doświadczenia Michelsona-Morleya.

Wymagana inna transformacja pomiędzy układami inercjalnymi.

(transformacja Galileusza) $\xrightarrow{\text{STW}}$ (transformacja Lorentza)

Drugi postulat (stałość c) zmusza nas do porzucenia klasycznego pojęcia czasu uniwersalnego.
Co rozumiemy przez czas mierzony względem wybranego układu odniesienia?

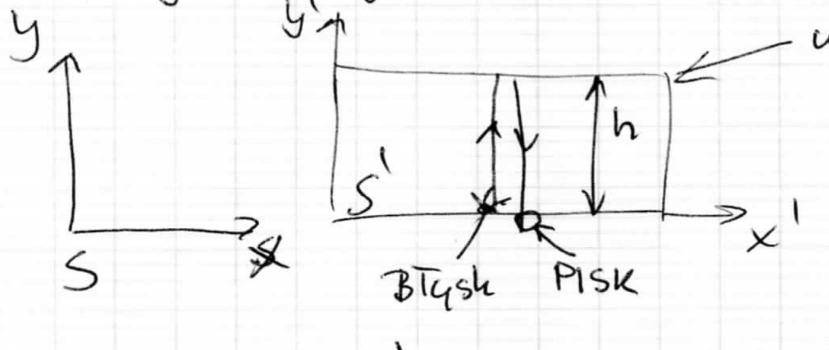
Pomiar czasu w wybranym układzie odniesienia

Zegary: nie muszą być identyczne, ale muszą mieć tę własność, że
- umieszczone w tym samym punkcie w tym samym układzie inercjalnym dają zgodne wskazania.

Jak mierzyć czas wielu obserwatorów rozmieszczonych w układzie S. Mierzę czas, w którym nastąpiło dane zdarzenie (np. błysk).
Możliwość przypisania (x, y, z) i t dowolnemu zdarzeniu w układzie S.

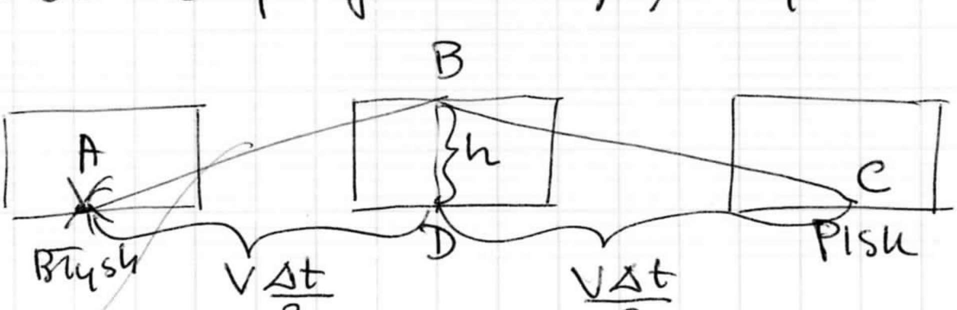
Dylatacja czasu

Eksperyment myślowy (Gedankenexperiment)



W układzie S' czas pomiędzy "Błyskiem" a "Piskiem"
$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

Ten sam eksperyment oglądany z układu S



przy założeniu, że wysokość wagonu jest taka sama w obu układach.
Patrz dowód później.

$$\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 + \left(V\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2h}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad ⊠$$

Konkluzja pozostaje prawdziwa w odniesieniu do <u>dowolnych</u> dwóch zdarzeń, które zachodzą w pociągu (układzie S') w tym samym miejscu.

Relacja oznacza, że czas mierzony w dwóch układach jest inny. Nie ma uniwersalnego czasu.

Jeżeli $V=0$ to $\beta = 0 \Rightarrow \Delta t = \Delta t'$
Jeżeli S' spoczywa względem S to nie ma żadnych różnic czasu.

$V \ll c \quad \beta \ll 1 \Rightarrow \Delta t \cong \Delta t'$

<u>Przykład</u>: Różnice w przypadku samolotu odrzutowego

$V = 300\,m/s \qquad \beta = V/c = 10^{-6}$

weźmy $\Delta t' = 1h$

$$\Delta t = \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Delta t'\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) = 1h + 1800 \cdot 10^{-12}s$$
$$= 1h + 1.8\,ns$$

$V = 0.99c \qquad \beta = 0.99 \qquad \Delta t \cong 7\Delta t'$

Jeżeli we wzorze ⊠ podstawimy $V=c$ $(\beta=1)$ otrzymujemy bezsensowny wynik
Jeżeli $V>c$ to Δt jest urojone

$$\Rightarrow \boxed{V < c}$$

Jedno z najważniejszych przewidywań teorii względności: Względna prędkość dwóch układów inercjalnych musi być mniejsza od c

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad \gamma \geq 1 \qquad \gamma \xrightarrow[\beta\to 1]{} \infty$$

$\Delta t = \gamma \Delta t' \geqslant \Delta t'$

Sugeruje, że układ S' jest wyróżniony

Czas pomiędzy zdarzeniami jest najmniejszy.

Tak jest istotnie – TYLKO W TYM UKŁADZIE DWA ZDARZENIA ZACHODZĄ W TYM SAMYM MIEJSCU.

często $\Delta t'$ jest więc oznaczane przez Δt_0

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t_0 \geqslant \Delta t_0}$$

odstęp czasu własnego między dwoma zdarzeniami

Dylatacja czasu

w poruszającym się układzie zegary zachowują się tak, jakby się późniły.

Pierwsze eksperymentalne potwierdzenie dylatacji czasu w roku 1941 (B. Rossi & D.B. Hall) Phys. Rev. 59, 223 (1941)

Na podstawie czasu połowicznego rozpadu mionu.

1971 eksperyment z samolotem US Navy i 4 zegarami atomowymi

GPS – położenie na podstawie ~~różnic~~ pomiarów przesunięć czasowych między sygnałami docierającymi do odbiornika z 24 satelitów GPS

Wymagana dokładność 1ns

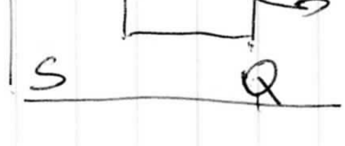
N. Ashby, Physics Today maj 2002

Kontrakcja podłużnych rozmiarów ciał

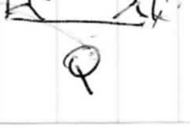
Długość ciała także może zależeć od wyboru układu odniesienia, względem którego jest mierzona

Mierzymy długość pociągu

Dla obserwatora w S $\quad l = V\Delta t$



Pomiar ~~[illegible]~~ długości wagonu w S'



Dwóch obserwatorów każdy rejestruje moment kiedy mija Q różnica daje $\Delta t'$

$$l' = V\Delta t'$$

$$\boxed{l = \frac{l'}{\gamma} \le l'}$$

mierzona w układzie spoczynkowym

l_0 – długość własna ciała

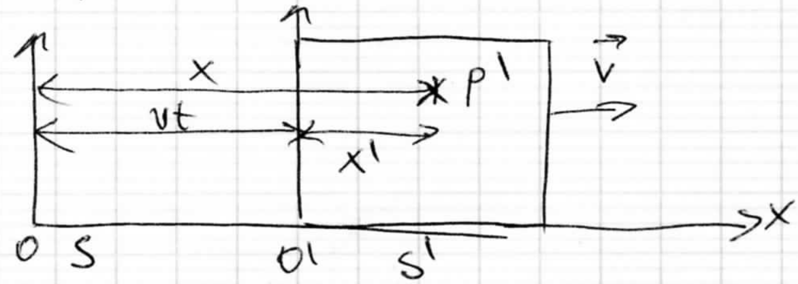
$$l = \frac{l_0}{\gamma} \le l_0$$

Kontrakcja podłużnej długości ciała. niesymetryczny wynik, układ S' jest wyróżniony. Jest to jedyny układ odniesienia, w którym ciało spoczywa.

Rozmiary ~~poprzeczne~~ ciał w kierunku poprzecznych do prędkości względnej nie zmieniają się.

wzór na zmianę długości odnosi się tylko do rozmiarów w kierunku równoległym.

Transformacja Lorentza



$y' = y$
$z' = z$

Wybuch wypala ślad na ścianie wagonu w punkcie P'

$$x - Vt = \frac{x'}{\gamma} \Rightarrow x' = \gamma(x - Vt)$$

Zamieniając ~~miejsce~~ rolami układy S i S' (wybuch wypala ślad na murze w układzie S)

$$x = \gamma(x' + Vt')$$

$$x = \gamma^2(x - Vt) + \gamma V t'$$

$$\Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

Transformacja Lorentza

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \end{aligned}}$$

Odwrotna transformacja Lorentza

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) \end{aligned}}$$

Relatywistyczny wzór na dodawanie prędkości

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \qquad dx' = \gamma(dx - V dt)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_x' = \frac{dx'}{dt'} \qquad dy' = dy$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_y' = \frac{dy'}{dt'} \qquad dz' = dz$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \qquad v_z' = \frac{dz'}{dt'} \qquad dt' = \gamma\left(dt - \frac{V dx}{c^2}\right)$$

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - V dt)}{\gamma(dt - V dx/c^2)} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - V dx/c^2)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)}$$

$$v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)}$$

Uwaga $v_y' \neq v_y$ nawet gdy $dy = dy'$
wynika z faktu, że $dt \neq dt'$

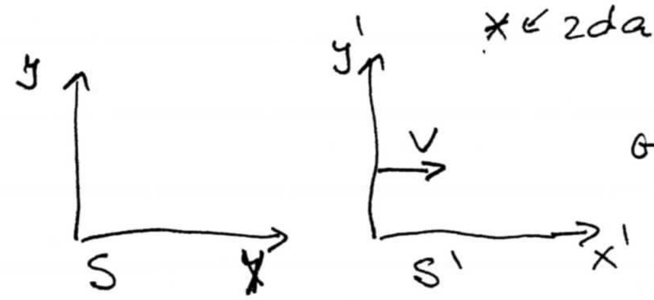
Transformacja Lorentza miesza współrzędne przestrzenne i czasowe, tzn w równaniach x' i t' pojawiają się zarówno x, jak i t.

Niemiecki matematyk Hermann Minkowski (1864–1909) zauważył, że czas można traktować jako czwartą komponentę wektora w czterowymiarowej przestrzeni (czasoprzestrzeni).

Obroty w zwykłej przestrzeni trójwymiarowej

$$\vec{q} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + q_3 \vec{e}_3 = \sum_i q_i \vec{e}_i$$

$$q_i = \vec{q} \cdot \vec{e}_i \qquad \vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$$



× ← zdarzenie o współrzędnych (x, y, z, t) w ukł. S oraz (x', y', z', t') w ukł S'

Transformacja Lorentza $\vec{v} = v\vec{e}_x$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

<u>Transformacja Lorentza</u> dla dowolnego kierunku prędkości $\vec{v}$ (względnej dwóch układów inercjalnych)

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \vec{r} + \frac{\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2} - \vec{v}t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}}{v^2}$$

$$t' = \frac{t - \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Konsekwencja Transf. Lorentza $\Rightarrow$ względność pojęcia równoczesności

- Załóżmy, że w układzie S dwa zdarzenia w różnych miejscach zdarzają się równocześnie $x_1 \neq x_2 \quad t_1 = t_2$
- Jak to jest w układzie S' ?

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \left(\frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$$

Dwa zdarzenia nie są równoczesne w układzie S'!

Czas własny cząstki

Cząstka może się poruszać z prędkością $v(t)$, czyli zmienną w czasie

Umieśćmy układ S' na cząstce $x' = 0$

Czas t' w tym układzie to czas własny cząstki t_0

Mamy $t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \rightarrow dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$

$$dt_0 = dt\sqrt{1-\left(\frac{V(t)}{c}\right)^2} \qquad \boxed{\Delta t_0 = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}}$$

Czterowymiarowa czasoprzestrzeń, czterowektory

- Transformacja Lorentza miesza współrzędne i czasowe
- Herman Minkowski (1864–1909) niemiecki matematyk, zauważył, że mieszanie współrzędnych czasowych i przestrzennych wskazuje, że można wprowadzić przestrzeń czterowymiarową (czasoprzestrzeń), w której transformacje Lorentza są czymś w rodzaju obrotów.

$x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z,\ x_4 = ct$

żeby zgadzał się wymiar z innymi x_i

$$x_1' = \gamma x_1 - \gamma\beta x_4$$
$$x_2' = x_2$$
$$x_3' = x_3$$
$$x_4' = -\gamma\beta x_1 + \gamma x_4$$

$x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$x' = \tilde{R}x$ $\tilde{R}$ - przypomina macierz obrotu

Analogia staje się pełniejsza jeżeli zauważyć, że $\gamma \geq 1$ więc $\gamma = \cosh\phi$

wtedy $\beta\gamma = \sinh\phi$

$$x_1' = \cosh\phi\, x_1 - \sinh\phi\, x_4$$
$$x_2' = x_2$$
$$x_3' = x_3$$
$$x_4' = -\sinh\phi\, x_1 + \cosh\phi\, x_4$$

Czterowektory

Przekształcenia $x' = \Lambda x$

Λ przekształcenie w przestrzeni czterowymiarowej

n.p. $\Lambda_R = \left(\begin{array}{ccc|c} & R & & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ zwykły obrót

$\Lambda_B = \text{Transf. Lorentza} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ standardowe pchnięcie

Dowolne $\Lambda = \Lambda_R \Lambda_B$

Λ_B – może być dla $\vec{v}$ w dowolnym kierunku

Można również 'pozbyć' się ograniczenia, że dla $t = t' = 0$ początki układów S i S' pokrywają się.

Definicja czterowektora

W dowolnym układzie inercjalnym S, czterowektorem nazywamy zbiór czterech liczb $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, takich, że ich wartości w dwóch układach odniesienia S i S' są powiązane równaniem

$$q' = \Lambda q, \text{ gdzie } \Lambda \text{ jest transformacją Lorentza.}$$

Niezmienniczy iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$ $\quad s = \vec{x}\cdot\vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

jest niezmienniczy względem obrotów w $\mathbb{R}^3$

Weźmy teraz $x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\vec{x}, ct)$

$$s = \vec{x}\cdot\vec{x} - c^2t^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

$$s' = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = \gamma^2(x_1 - \beta x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 - \gamma^2(-\beta x_1 + x_4)^2 =$$

$$= \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{=1}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2\right] = s$$

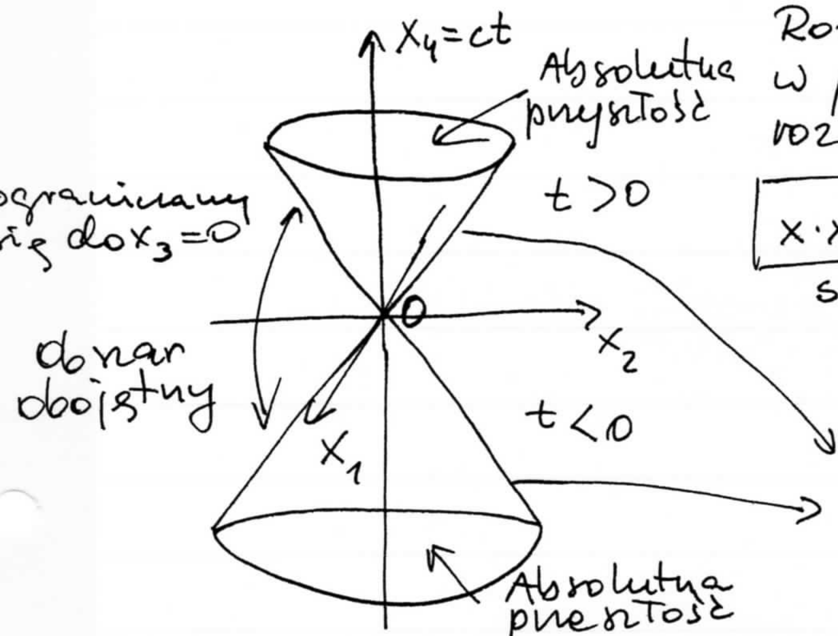
Iloczyn skalarny w przestrzeni czterowymiarowej

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ $\qquad y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$\boxed{x\cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4} \qquad x\cdot y = (\Lambda x)\cdot(\Lambda y)$$

Stożek świetlny

Iloczyn skalarny pozwala nam podzielić czasoprzestrzeń na pięć obszarów, które mają różne własności fizyczne



Rozważmy sygnał lampy w punkcie $\vec{x} = 0$ w chwili $t = 0$ rozchodzący się w czasoprzestrzeni

$\boxed{x \cdot x = \vec{x} \cdot \vec{x} - c^2t^2 = 0}$ definiuje stożek świetlny

<u>Przyszłościowy stożek świetlny</u> - zbiór wszystkich punktów czasoprzestrzeni, do którego dotarłoby światło wypuszczone w punkcie $(\vec{o}, 0)$

<u>Przeszłościowy stożek świetlny</u> - zbiór punktów $x = (\vec{x}, ct)$ mających własność, że sygnał wysłany w przeszłości $(t < 0)$ może przejść przez punkt O.

<u>Absolutna przyszłość</u> = wnętrze przyszłościowego stożka

Dla punktów P leżących w tym obszarze $t > 0$

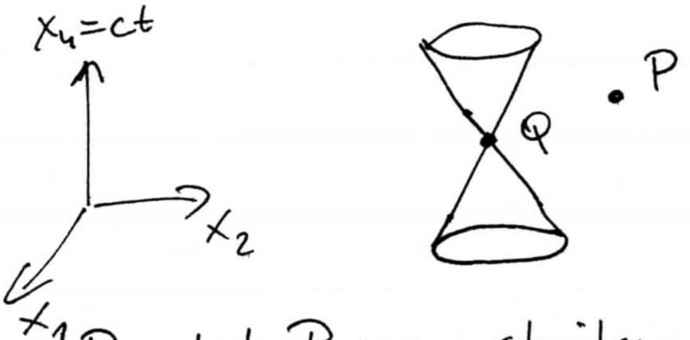
$$x \cdot x < 0 \; ; \quad \vec{x} \cdot \vec{x} < c^2t^2 \; ; \quad |\vec{x}|^2 < c^2t^2$$

P jest w przyszłości w stosunku do O dla wszystkich obserwatorów S'

<u>Absolutna przeszłość</u> = wnętrze przeszłościowego stożka

Dla punktów P leżących w tym obszarze, P jest w przeszłości w stosunku do O dla wszystkich obserwatorów w układach inercjalnych S'.

- <u>stożek świetlny dowolnego punktu Q czasoprzestrzeni (niekoniecznie O)</u>



Stożek = zbiór promieni świetlnych przechodzących przez Q

Stożek świetlny punktu Q

• Punkt P na stożku spełnia równanie

$(x_Q - x_P)^2 = 0 \qquad (\vec{x}_P - \vec{x}_Q) = c^2 (t_P - t_Q)^2$

P ∈ przyszłościowy stożek Q $\quad t_P > t_Q$ } Dla wszystkich S

P ∈ przeszłościowy stożek Q $\quad t_P < t_Q$

$(x_P - x_Q)^2 > 0 \qquad (\vec{x}_P - \vec{x}_Q)^2 > c^2 (t_P - t_Q)^2$

Punkt P na zewnątrz stożka punktu Q

<u>Twierdzenie</u>

- Istnieją układy odniesienia S', w których $t'_P > t'_Q$
- Istnieją układy odniesienia S'', " — — $t''_P = t''_Q$
- " — — — S''' $t'''_P < t'''_Q$

☒ następstwo czasowe dwóch zdarzeń zależy od układu odniesienia!

☒ Nie ma związku przyczynowego pomiędzy zdarzeniami w Q i P!

<u>Uwaga</u>: Sygnał biegnący z Q do P musiałby poruszać się z prędkością większą niż c!

Żadne oddziaływanie przyczynowe nie może rozchodzić się z prędkością większą od prędkości światła