DYNAMIKA UKŁADÓW CIĄGŁYCH (cnt.)

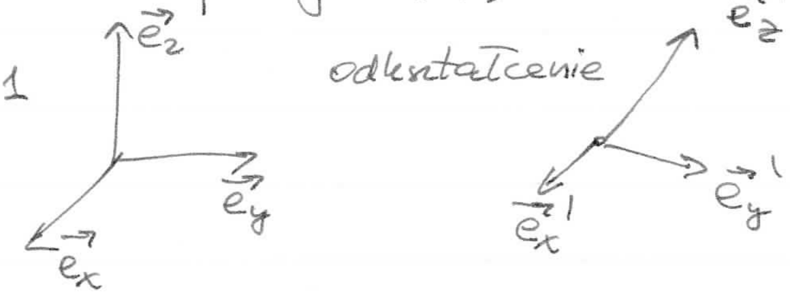
Elastomechanika – mechanika ośrodków ciągłych

- Ciała stałe rozpatrujemy jako kontinuum materii
- Dozwalamy możliwość deformacji pod wpływem sił zewnętrznych
- Rozpatrujemy tylko małe deformacje, które są proporcjonalne do działających sił (prawo Hook'a)
- Zaniedbujemy plastyczne deformacje, powstawanie dyslokacji, pęknięć

Tensor odkształcenia

. Jednostkowe wektory w niezdeformowanym ciele sztywnym $\{\vec{e}_\alpha\}$

$|\vec{e}_\alpha| = 1$



$\varepsilon_{\alpha\beta} \ll 1$

$$\vec{e}_x{}' = (1+\varepsilon_{xx})\vec{e}_x + \varepsilon_{xy}\vec{e}_y + \varepsilon_{xz}\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y{}' = \varepsilon_{yx}\vec{e}_x + (1+\varepsilon_{yy})\vec{e}_y + \varepsilon_{yz}\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z{}' = \varepsilon_{zx}\vec{e}_x + \varepsilon_{zy}\vec{e}_y + (1+\varepsilon_{zz})\vec{e}_z$$

Gdy $\varepsilon_{\alpha\beta}$ są niezależne od $\vec{r}$ to odkształcenie nazywamy jednorodnym

$$\vec{e}_x{}' \cdot \vec{e}_x{}' = (1+\varepsilon_{xx})^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 \approx 1 + 2\varepsilon_{xx}$$

$$|\vec{e}_x{}'| \approx 1 + \varepsilon_{xx}$$

odkształcenie zmienia długość wektorów

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ opisują względną zmianę długości wektorów $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ przy odkształceniu

$$\vec{e}_x{}' \cdot \vec{e}_y{}' = (1+\varepsilon_{xx})\varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy}(1+\varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} \approx$$
$$\approx \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy}$$

$\varepsilon_{\alpha\beta}$ dla $\alpha \neq \beta$ opisują zmianę kątów przez odkształcenie

Jaki wpływ ma odkształcenie na punkt w ciele stałym?

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Po odkształceniu $\vec{r} \to \vec{r}\,' = x\vec{e}_x{}' + y\vec{e}_y{}' + z\vec{e}_z{}'$

Zdefiniujmy wektor odkształcenia

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{r}\,' - \vec{r} = x(\vec{e}_x{}' - \vec{e}_x) + y(\vec{e}_y{}' - \vec{e}_y) + z(\vec{e}_z{}' - \vec{e}_z)$$

$$\vec{u}(\vec{r}) = (x\varepsilon_{xx} + y\varepsilon_{yx} + z\varepsilon_{zx})\vec{e}_x +$$
$$+ (x\varepsilon_{xy} + y\varepsilon_{yy} + z\varepsilon_{zy})\vec{e}_y +$$
$$+ (x\varepsilon_{xz} + y\varepsilon_{yz} + z\varepsilon_{zz})\vec{e}_z$$

$$\vec{u}(\vec{r}) = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$$

$$u_\alpha(\vec{r}) = \underbrace{u_\alpha(0)}_{u_0} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}x + \frac{\partial u_\alpha}{\partial y}y + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z}z$$

Punkt $\vec{r}=0$ nie przesuwa się

$$\varepsilon_{\beta\alpha} \equiv \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \quad ; \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \; \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y}; \; \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

Definiuje się symetryczny tensor odkształcenia $\overleftrightarrow{e}(\vec{r})$

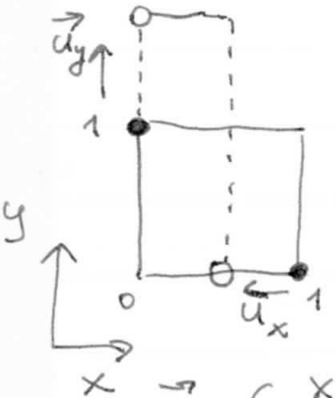
$$e_{xx} \equiv \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad e_{yy} \equiv \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad e_{zz} \equiv \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

składowe diagonalne opisują ściskanie lub rozciąganie wzdłuż odpowiednich osi

pozadiagonalne elementy opisują zmiany kątów

$$e_{xy} \equiv \vec{e}_x{}' \cdot \vec{e}_y{}' = \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$
$$e_{yz} \equiv \vec{e}_y{}' \cdot \vec{e}_z{}' = \varepsilon_{zy} + \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$
$$e_{zx} \equiv \vec{e}_z{}' \cdot \vec{e}_x{}' = \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

Przykład



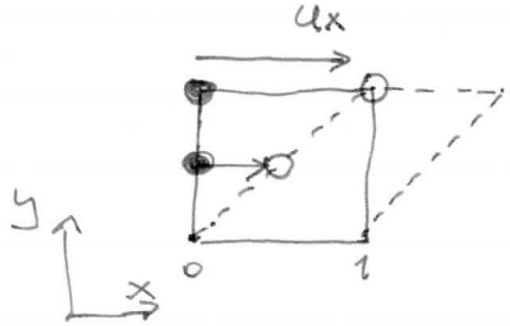
$\vec{u} = \left(-\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$

$\varepsilon_{xx} = -\frac{1}{2}$

$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2}$

inne składowe

$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$



$\vec{u} = (y, 0, 0)$

$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = 1$

Hydrostatyczne ściśnięcie

z każdym odkształceniem może być związana zmiana objętości

$$V' = \vec{e}_x{}' \cdot \left(\vec{e}_y{}' \times \vec{e}_z{}'\right) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & 1+\varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & 1+\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} V =$$

$$= (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) V$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

Odkształcenia ścinające (bez zmiany objętości)

każde odkształcenie można przedstawić jako ~~napię~~ zmianę objętości i odkształcenie ścinające

$$e_{\alpha\beta} = \underbrace{\left(e_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} e_{\alpha\alpha}\right)}_{\bar{\bar{e}}_{\alpha\beta}} + \tfrac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} e_{\alpha\alpha}$$

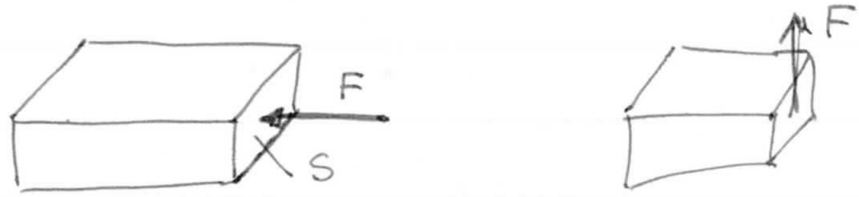
$$\bar{\bar{e}}_{11} = e_{11} - \tfrac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33})$$
$$\bar{\bar{e}}_{22} = e_{22} - \tfrac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33})$$
$$\bar{\bar{e}}_{33} = e_{33} - \tfrac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33})$$

oczywiście

$\bar{\bar{e}}_{11} + \bar{\bar{e}}_{22} + \bar{\bar{e}}_{33} = 0$; czyli $\bar{\bar{e}}_{\alpha\beta}$ opisuje odkształcenie ściskające bez zmiany objętości

Tensor naprężeń

Siły objętościowe i powierzchniowe



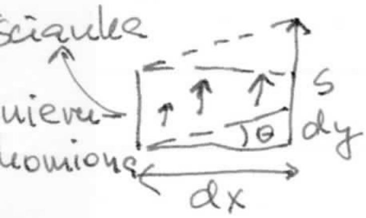
siły objętościowe $\vec{F} = \rho \vec{g} dV$ (siła ciężkości)

$\vec{F} = -p\vec{n}dA$

siła skierowana do wnętrza objętości

ścinanie

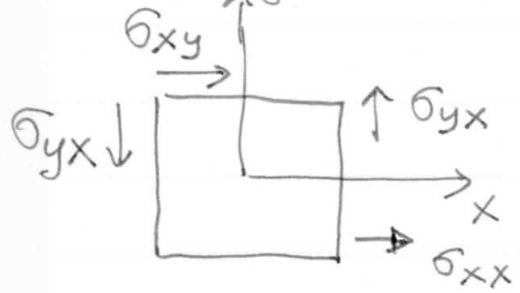
Siła powierzchniowa – siła, której wartość jest proporcjonalna do pola powierzchni elementu powierzchni



Zewnętrzne siły powierzchniowe powodują odkształcenia

$$\text{naprężenie} = \frac{\text{siła}}{\text{pole powierzchni}}$$

tensor $\hat{\sigma}$ $\sigma_{\alpha\beta}$ – komponenta α siły działająca na powierzchnię prostopadłą do $\vec{e}_\beta$



Tensor $\hat{\sigma}$ jest symetryczny

$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$

$\Leftrightarrow$ warunek, że ciało spoczywa i nie dokonuje obrotu.

Relacje pomiędzy tensorem naprężeń a odkształceń

Moduły elastyczności w anizotropowych ośrodkach

$$e_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\sigma_{\gamma\delta}$$ S – współczynniki elastyczności

$$\boxed{\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}\,e_{\gamma\delta}}$$
PRAWO HOOKA

C – moduły elastyczności

21 – niezależnych składowych

notacja inżynierska

$1 \equiv xx \quad 2 \equiv yy, \ 3 \equiv zz, \ 4 \equiv yz, \ 5 \equiv zx, \ 6 \equiv xy$

$$e_\alpha = \sum_{\beta=1}^{6} S_{\alpha\beta}\sigma_\beta \qquad \sigma_\alpha = \sum_{\beta=1}^{6} C_{\alpha\beta} e_\beta$$

Energia elastyczna kryształu

odkształcenie powoduje zmianę (wzrost) energii kryształu.

Rozwiniemy energię względem e_α do członów drugiego rzędu

$$U = U_0 + \sum_{\lambda=1}^{6} k_\lambda e_\lambda + \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{6} \tilde{C}_{\lambda\mu} e_\lambda e_\mu$$

$$k_\lambda = \frac{\partial U}{\partial e_\lambda} = \sigma_\lambda$$ – składowe naprężenia

bez odkształcenia kryształ jest w minimum energii $\Longrightarrow k_\lambda = 0 \quad \forall_\lambda$

W kryształach kubicznych liczba niezależnych stałych redukuje się do 3

C_{11}, C_{12}, C_{44}

$$\sigma_{xx} = \begin{vmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\\ e_5\\ e_6\end{vmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2}C_{11}(e_1^2+e_2^2+e_3^2) + \frac{1}{2}C_{44}(e_4^2+e_5^2+e_6^2) + C_{12}(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)$$

Stałe elastyczne w GPa $= \frac{GN}{m^2} = \frac{kN}{mm^2}$

	C_{11}	C_{12}	C_{44}
Diament	1076	125	576
Krzem	166	64	80
Sól kuchenna	49	12	13
Na	7	6	4

Izotropowe elastyczne kontinuum

(*) $$\boxed{\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu e_{\alpha\beta} + \lambda(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})\delta_{\alpha\beta}}$$

W izotropowym materiale $C_{11} - C_{12} = C_{44}$

$$2\mu = C_{44} \qquad \lambda = C_{12}$$

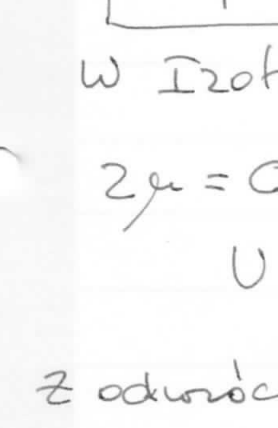
$$U = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{6}\sigma_\alpha e_\alpha = \mu\sum_{\alpha=1}^{6} e_\alpha^2 + \frac{\lambda}{2}(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})^2$$

Z odwrócenia (*)

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\delta_{\alpha\beta}$$

Przykład

Odkształcenie pręta



Siła δp na obu końcach pręta

ściskanie $\delta p < 0$, rozciąganie $\delta p > 0$

$$\sigma_{zz} = \delta p$$

$$e_{zz} = \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\right)\sigma_{zz} = \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{zz} = \frac{1}{E}\delta p$$

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{zz}$$

e_{zz} – określa względne wydłużenie pręta

E – moduł Younga

$$e_{xx} = e_{yy} = -\nu e_{zz} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$$

liczba Poissona

Równanie ruchu dla ośrodka sprężystego

Rozważmy mały element ośrodka sprężystego o infinitezymalnej objętości dV

Masa ϱdV

położenie elementu objętości

$$\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}, t)$$

$$\varrho dV \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{F}_{obj} + \vec{F}_{pow}$$

$$\vec{F}_{obj} = \varrho \vec{g} dV$$

$$F_{pow} = \int_S \sigma_{\alpha\beta} n_\beta dA$$

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\varrho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \varrho g_\alpha + \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\alpha y}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial z} \right)}$$

$$\varrho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \varrho g_\alpha + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$$

Np. dla kubicznego kryształu

$$\varrho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + C_{12} \left(\frac{\partial e_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial x} \right) + C_{44} \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} + C_{44} \frac{\partial e_{zx}}{\partial z}$$

e_{xx} można wyrazić przez u_x

$$\varrho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right)$$

Można szukać rozwiązań w postaci

$$u_x(x) = u_0 \exp[i(Kx - \omega t)]; \quad u_y = 0 \quad u_z = 0$$

$K = \frac{2\pi}{\lambda}$ - liczba falowa $\qquad \omega$ - częstość

$\omega^2 \varrho = C_{11} K^2 \rightarrow$ drgania podłużne z prędkością dźwięku $v = \frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\varrho}}$

Również drgania poprzeczne

$$u_y = u_0 \exp[i(Kx - \omega t)]; \quad u_x = u_z = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 \varrho = C_{44} K^2 \quad ; \quad v = \sqrt{\frac{C_{44}}{\varrho}}$$

prędkość fazowa drgań poprzecznych

Hydrodynamika

Równania ruchu (dynamika) cieczy i gazów

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu}{\Delta V}$$ ← suma po N atomach które znajdują się w objętości ΔV wokół punktu $\vec{r}$

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \vec{v}_\nu = \langle \vec{v}_\nu \rangle_{\Delta V}$$

uśredniona prędkość N atomów

Molekuły powietrza $|\vec{v}_\nu| = 10^4 - 10^5\, cm/s$, termiczne ruchy

$|\vec{v}(\vec{r},t)|$ jest typowo 10 razy mniejsza

W gazie lub cieczy (ogólnie mówimy płynie) panuje ciśnienie

$$p(\vec{r},t) = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\text{siła}}{\text{powierzchnia}}$$

źródło ciśnienia – zderzenia atomów

Jeżeli ΔV zostanie wybrane rozsądnie $\rho, \vec{v}, i\ p$ nie zależą od ΔV.

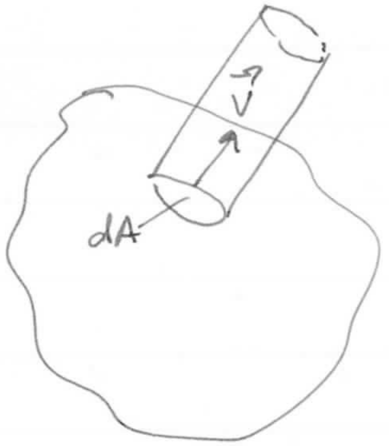
- Płyny, które dadzą się opisać przez $\rho, \vec{v}$ i p nazywamy idealnymi
- W idealnych płynach nie uwzględnia się lepkości (pewnego rodzaju tarcia) i efektów temperaturowych.

Potrzebne $T(\vec{r},t)$, żeby to uwzględnić

Przy przepływie płynu nie ginie materia ⟹ równanie ciągłości

$$\vec{j}(\vec{r},t) := \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$$ gęstość prądu

$$[\vec{j}] = \frac{\text{Masa}}{\text{objętość}} \cdot \frac{\text{Długość}}{\text{czas}} = \frac{\text{Masa}}{\text{Powierzchnia} \cdot \text{Czas}}$$



Liczba cząstek jest stała

$$\oint_{\partial\Omega} d\vec{\sigma}\, \varrho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t) = -\frac{d}{dt}\int_{\Omega} d^3r\, \varrho(\vec{r},t)$$

$\Omega \equiv V$ – objętość

$\partial\Omega =$ Powierzchnia otaczająca obszar V

Zakładamy, że V jest stała w jakimś układzie inercjalnym

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \varrho(\vec{r},t) = \int_V d^3r\, \frac{\partial}{\partial t}\varrho(\vec{r},t)$$

~~Praw~~ Twierdzenie Gaussa $\int_{\partial\Omega} d\vec{\sigma}\cdot\vec{W} = \int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{W}\, dV$

$$\int_V d^3r \left(\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\vec{v})\right) = 0$$

← równość dla dowolnych objętości V

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\vec{v}) = 0} \qquad \boxed{\frac{\partial\varrho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0}$$

↗ Równanie ciągłości

Równanie Eulera

Rozważmy objętość $\Delta V'$ płynu

$\Delta m = \varrho(\vec{r},t)\,\Delta V'$ ← masa

$\Delta\vec{F}$ siła działająca na masę Δm

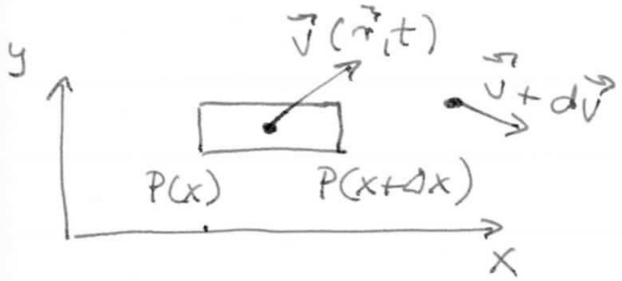
$$\Delta m \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \varrho(\vec{r},t)\,\Delta V' \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \Delta\vec{F}(\vec{r},t)$$

Jakie zjawiska dają wkład do siły $\Delta\vec{F}$

Np. siła ciężkości (siła objętościowa) $\Delta F_f = f(\vec{r},t)\Delta V'$

$$f(\vec{r},t) = \varrho(\vec{r},t)\,\vec{g}$$

- Niejednorodność ciśnienia (zależność P od $\vec{r}$) też jest źródłem siły!



$$\Delta V' = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta \vec K_p = -\oint_{\Delta V'} d\vec A \cdot P = -\vec e_x \Delta y \Delta z\,[P(x+\Delta x)-P(x)] + $$
$$-\vec e_y \Delta x \Delta z\,[P(y+\Delta y)-P(y)] +$$
$$-\vec e_z \Delta x \Delta y\,[P(z+\Delta z)-P(z)]$$

tylko współrzędne, które się zmieniają zostały zaznaczone

$$\Delta \vec K_p = -\Delta V'(\mathrm{grad}\,P) = -\Delta V'(\nabla P(\vec r,t))$$

Rozważmy przyspieszenie

$\frac{d\vec v(\vec r,t)}{dt}$. Mamy dwa źródła przyspieszenia

1) $\vec v$ zależy explicite od czasu
2) W czasie dt przesuwa się element masy z punktu $\vec r$ do $\vec r+\vec v dt$, gdzie uśredniona prędkość ma inną wartość

Formalnie możemy zapisać różniczkę zupełną

$$d\vec v = \frac{\partial \vec v}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec v}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec v}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec v}{\partial z}dz = \frac{\partial \vec v}{\partial t}dt + \Delta\vec r \cdot \nabla \vec v$$
$$= \frac{\partial \vec v}{\partial t}dt + (\vec v\cdot\nabla)\vec v\,dt$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec v}{\partial t} + (\vec v\cdot\nabla)\vec v\right) = -\nabla P + \vec f}$$ równanie Eulera

Równanie Eulera
Równanie ciągłości } → równania różniczkowe cząstkowe
(+ warunki początkowe i brzegowe)

4 Równania na 5 niewiadomych ρ, $\vec v$, P

Potrzebne jeszcze inne równanie, żeby je wyznaczyć

Równanie stanu ≡ zależność P od ρ, $P=P(\rho(\vec r,t))$
Gaz idealny $P(\rho) = \frac{k_B T}{m}\rho = \mathrm{const}\cdot\rho$

$\rho(\vec r,t) = \rho_0 = \mathrm{const}$ Płyn nieściśliwy

Równanie Eulera
Równanie ciągłości } ⇒ $\vec v$, P

Przykłady

(1) **Hydrostatyka** $\rho(\vec{r},t)=\rho(\vec{r})$; $\vec{v}(\vec{r},t)=0$, $P(\vec{r},t)=P(\vec{r})$

Rozpatrujemy spoczywający płyn w jednorodnym polu grawitacyjnym.

$$\vec{f}=\rho\vec{g}=-\rho g\vec{e}_z$$

Równanie ciągłości spełnione trywialnie

Równanie Eulera $\rightarrow \mathrm{grad}\,P=\rho\vec{g} \rightarrow \dfrac{dP(z)}{dz}=-\rho(z)g$

Jeżeli płyn jest nieściśliwy $\rho=\rho_0$

$$\frac{dP(z)}{dz}=-\rho_0 g \Longrightarrow \boxed{P(z)=P_0-\rho_0 g z}$$

ciśnienie dla $z=0$

opisuje ciśnienie w jeziorze w zależności od głębokości

(2) **Rotująca ciecz w polu ciężkości**

$\vec{g}=-g\vec{e}_z$ $\qquad \vec{v}=\vec{v}(\vec{r})=\omega\,\vec{e}_z\times\vec{r}$

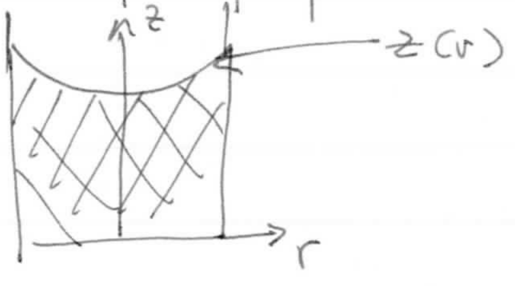
(Równania Eulera i ciągłości w cylindrycznych współrzędnych, $\rho=\rho_0$) $\Longrightarrow \boxed{P(r,z)=\rho_0\left(-gz+\dfrac{\omega^2r^2}{2}\right)+\mathrm{const}}$

w cieczy

W powietrzu mamy $P=P_0$ (ciśnienie atmosferyczne)

na granicy dwóch faz (ciecz, powietrze) musi zachodzić równość $P(r,z)=P_0$

To definiuje powierzchnię $z(r)=\dfrac{\omega^2}{2g}r^2+\mathrm{const}$



(3) Przypadek przepływu laminarnego (bez wirów)

$\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{r})=0 \Rightarrow v(\vec{r})=\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r})$.