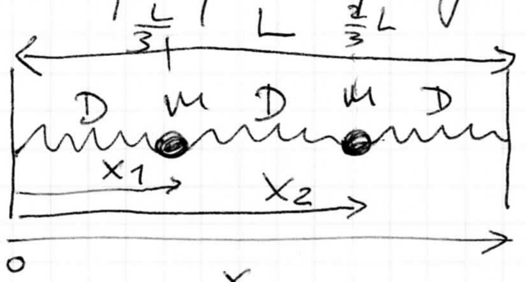
DYNAMIKA UKŁADÓW CIĄGŁYCH

Drgania w ośrodkach ciągłych – jeden z ważniejszych działów mechaniki klasycznej

Pokażemy jak przejść od drgań wielu mas do drgań struny o stałej liniowej gęstości masy.

Zacznijmy od przykładu



Rozpatrzmy drgania podłużne (tzn. wzdłuż osi x) układu

$$L = T - V \qquad T = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{D}{2}(x_1 - l)^2 + \frac{D}{2}(x_2 - x_1 - l)^2 + \frac{D}{2}(L - x_2 - l)^2$$

l – długość nienaprężonej sprężyny

Położenie równowagi mas m

Warunek konieczny

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = D(x_1 - l) + D(l + x_1 - x_2) = 2Dx_1 - Dx_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = D(x_2 - x_1 - l) + D(x_2 + l - L) = D(2x_2 - x_1 - L)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = 2D \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = -D \qquad \det\begin{vmatrix} 2D & -D \\ -D & 2D \end{vmatrix} = 3D^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} = -D \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = 2D$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \longrightarrow x_2 = \frac{2}{3}L$$

Minimum energii potencjalnej dla $x_1 = \frac{1}{3}L$, $x_2 = \frac{2}{3}L$ } Położenie równowagi trwałej

Jeżeli $l \neq \frac{L}{3}$ w równowadze działają na masy m siły napięcia sprężyny.

Przejdźmy od zmiennych x_1 & x_2 do zmiennych będących wychyleniami z położeń równowagi

$$q_1 = x_1 - \frac{L}{3} \qquad q_2 = x_2 - \frac{2L}{3}$$

$$V(x_1, x_2) \rightarrow V(q_1, q_2)$$

$$V(q_1, q_2) = \frac{D}{2} q_1^2 + \frac{D}{2}(q_2 - q_1)^2 + \frac{D}{2} q_2^2 + \frac{D}{2} \cdot 3 \left(\frac{L}{3} - l\right)^2$$

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \rightarrow T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_2^2$$

Równania ruchu $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,2$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + 2Dq_1 - Dq_2 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + 2Dq_2 - Dq_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ równania ruchu}$$

Ansatz: $q_i(t) = C a_i \cos(\omega t - \delta_i) \qquad i = 1,2$

$$\begin{vmatrix} (2D - m\omega^2) a_1 & - D a_2 \\ - D a_1 & + (2D - m\omega^2) a_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2D - m\omega^2 & -D \\ -D & 2D - m\omega^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

Rozwiązania istnieją gdy

$$\det \begin{vmatrix} 2D - m\omega^2 & -D \\ -D & 2D - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2D - m\omega^2)^2 - D^2 = 0 \qquad \varkappa \equiv \frac{D}{m}$$

$$\omega_1^2 = \varkappa = \frac{D}{m} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_2^2 = 3\varkappa = \frac{3D}{m} \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{3D}{m}}$$

Wektory własne odpowiadające

$$\omega_1 \rightarrow a_1 = a_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 \rightarrow a_2 = -a_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dwa mody własne ω_1 i ω_2

Drgania normalne

$$\vec{q}_1(t) = C_1\cos(\omega_1 t - \delta_1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\vec{q}_2(t) = C_2\cos(\omega_2 t - \delta_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Ogólne rozwiązanie

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_1(t) + \vec{q}_2(t)$$

4 stałe $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2$ z warunków początkowych

$q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)$

n.p. $q_1(0) = q_2(0)$
$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0)$
dają $C_2 = 0$

Jeden oscylator

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

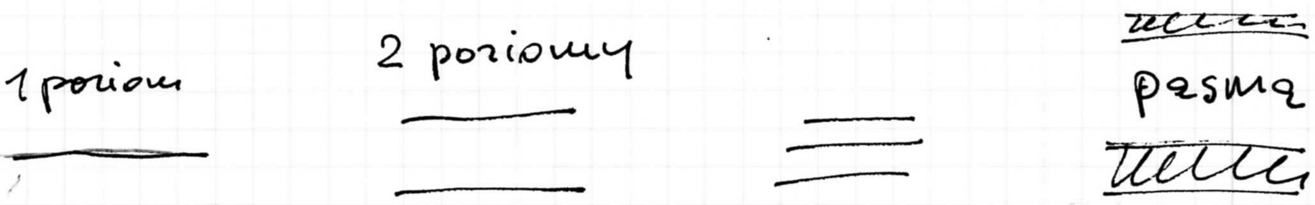
Dwa niezależne oscylatory (ta sama częstość)

Dwa sprzężone oscylatory, dwie częstości

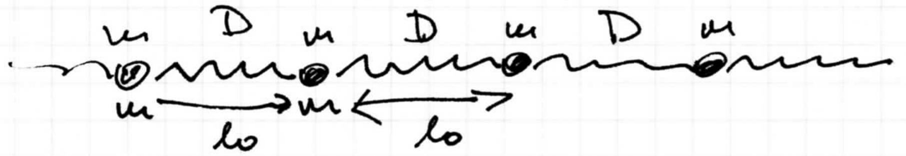
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3D}{m}}$$

Analogia do molekuł

pojedynczy atom np H	Dwuatomowa molekuła np H_2	3 atomowa	n^{∞} atomów ciało stałe



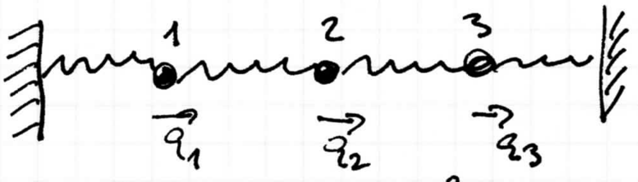
Przejście do drgającego kontinuum



Łańcuch drgający

Gdy masy łańcucha będą coraz mniejsze oraz odpowiednio odległości pomiędzy masami będziemy mieli przejście do ciągłego rozkładu masy o stałej liniowej gęstości

Oscylator z 3 masami



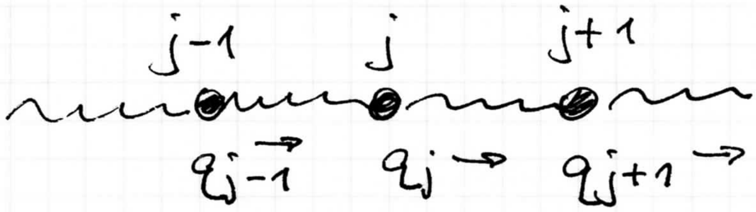
$$V = \frac{D}{2} q_1^2 + \frac{D}{2}(q_2 - q_1)^2 + \frac{D}{2}(q_3 - q_2)^2 + \frac{D}{2}(q_3)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = D(q_2 - q_1) + D(-q_3 + q_2) =$$

$$= 2Dq_2 - Dq_1 - Dq_3$$

$$m\ddot{q}_2 + D(2q_2 - q_1 - q_3) = 0$$

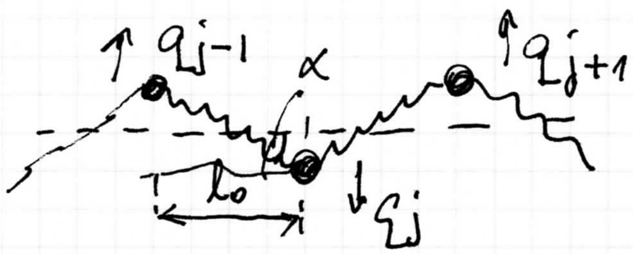
Oscylator z n masami



Drgania podłużne

Równanie ruchu $\boxed{m\ddot{q}_j + D(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1}) = 0}$

Rozpatrzmy teraz drgania poprzeczne oscylatora z n-masami



Małe wychylenia poprzeczne od położenia równowagi

Siły działające na masy są stałe i równe siłom działającym w położeniu równowagi

Siła działająca w kierunku poprzecznym na masę m_j ze strony masy m_{j+1} jest równa $F\sin\alpha$

dla małych kątów

$$F\sin\alpha \approx F\,tg\alpha = F\frac{q_{j+1}-q_j}{l_0}$$

Analogicznie siła ze strony masy $j-1$

$$F\frac{q_{j-1}-q_j}{l_0}$$

Równanie ruchu dla masy m_j

$$\boxed{m\ddot{q}_j + \frac{F}{l_0}\left(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1}\right) = 0}$$ Drgania poprzeczne

Jeżeli przyjmiemy $\frac{F}{l_0} = D$ to równania ruchu dla drgań podłużnych i poprzecznych mają jednakową postać.

Przejście do równań ciągłych (drgające kontinuum)

Będziemy zwiększali liczbę mas n w łańcuchu $n \to \infty$ ale przy spełnieniu szeregu warunków:

1) Długość łańcucha L pozostaje bez zmiany

$L = (n+1)l_0$, gdzie l_0 - równowagowa odległość pomiędzy masami

$n \to \infty \quad l_0 \to 0$ tak, że $(n+1)l_0 = l = const$

2) Liniowa gęstość pozostaje stała

$m \to 0 \quad l_0 \to 0$ tak, że $\frac{m}{l_0} = \rho = const$

3) Iloczyn stałej sprężystości D i 'długości' sprężyny l_0 pozostaje stały

$D \to \infty \quad l_0 \to 0$, tak, że $D l_0 = const$

Napiszmy równanie ruchu dla masy j w następującej postaci

$$\frac{m}{Dl_0^2}\ddot{q}_j = \frac{1}{l_0}\left[\frac{q_{j+1}-q_j}{l_0} - \frac{q_j - q_{j-1}}{l_0}\right]$$

i przejdziemy z $l_0 \to 0$

Dla $l_0 \to 0$ zastąpimy index j i wychylenie $q_j(t)$ przez współrzędną położenia w równowadze x i wychylenie $\psi(x,t)$ w położeniu x

$$q_j(t) \longrightarrow \underline{\underline{\psi(x,t)}} \quad z \quad x = jl_0$$

$$\lim_{l_0\to 0}\frac{1}{l_0}\left[\frac{\psi(x+l_0,t)-\psi(x,t)}{l_0} - \frac{\psi(x,t)-\psi(x-l_0,t)}{l_0}\right] =$$

$$= \lim_{l_0\to 0}\frac{\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x+\frac{l_0}{2}} - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x-\frac{l_0}{2}}}{l_0} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{m}{Dl_0^2} = \frac{m/l_0}{Dl_0} = \underbrace{\frac{\rho}{Dl_0}}_{\text{z założenia stała wielkość}} := \frac{1}{c^2} \qquad c = \sqrt{\frac{Dl_0}{\rho}}$$

Otrzymujemy równania falowe

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

c – prędkość fazowa fali

Fizyczne znaczenie prędkości

Pamiętamy, że dla drgań poprzecznych

$$D := \frac{F}{l_0} \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{F} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

F – napięcie struny

ρ – gęstość liniowa struny

Dla drgań podłużnych pręta o długości l i przekroju A 12-7

Definiujemy moduł elastyczności (moduł Younga) E

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{l_0}{A}\cdot F \qquad E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta l}{l_0}}$$

↑

wydłużenie

$$\Rightarrow D = \frac{EA}{l}$$

z prawa Hooka mamy $\Delta l = \frac{F}{D}$

Biorąc $l = l_0$; $Dl_0 = EA$ $\Rightarrow$ $\boxed{c = \sqrt{\frac{EA}{\rho}}}$

dla fal podłużnych.

Równanie falowe

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

jedno z ważniejszych równań FIZYKI

- elastomechanika
- optyka
- Akustyka
- elektrodynamika

Równanie falowe ma 2 typy rozwiązań

1) Rozwiązania d'Alemberta

$$\psi(x,t) = f(x \pm ct)$$ gdzie f dowolna funkcja

opisuje fale biegnące i stojące

2) Rozwiązania Bernoulliego

$$\psi(x,t) = g(x)\,h(t)$$

opisują tylko fale stojące

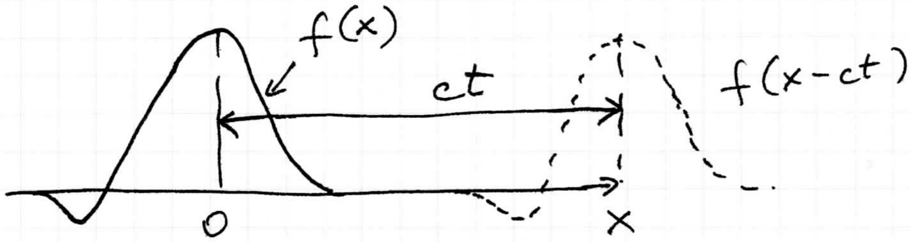
$$\left[\ \psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)\right.$$

Jest ogólnym rozwiązaniem równania falowego, gdzie f i g są dowolnymi funkcjami.

Spróbujmy zinterpretować te rozwiązania:
przyjmijmy najpierw, że $g \equiv 0$

$$\psi(x,t) = f(x-ct)$$

W chwili $t=0$ wychylenie $\psi(x,0)$ ma postać funkcji $f(x)$



Dla chwili $t \neq 0$ kształt zaburzenia opisany jest funkcją $\psi(x,t) = f(x-ct)$

Zaburzenie przesunęło się bez zmiany kształtu w prawo o odległość ct.

Zaburzenie jest falą o stałym profilu, przemieszczającą się w prawo ze stałą prędkością.

Podobnie $g(x+ct)$ opisuje przemieszczanie się fali w lewo

Ogólne rozwiązanie $f(x-ct)+g(x+ct)$ opisuje superpozycję dwóch fal, z których jedna przemieszcza się w lewo a druga w prawo.

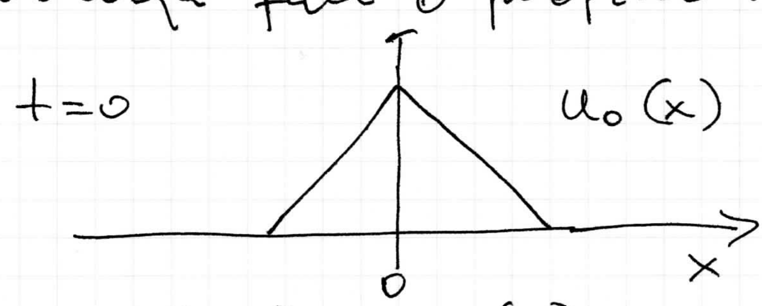
Funkcje f i g wyznacza się z warunków początkowych dla danego zagadnienia.

Dla jednoznacznego rozwiązania równania falowego, trzeba podać położenie i prędkość $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ w chwili początkowej

$$\psi(x,0) \quad i \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0)$$

<u>Rozważmy przykład</u>

Ewolucja fali o profilu trójkątnym



$$\psi(x,0) = u_0(x) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = 0$$

Znaleźć przebieg $\psi(x,t)$ dla późniejszych chwil

$$\psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$$\psi(x,0) = f(x) + g(x) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -c\frac{df}{d(x-ct)} + c\frac{dg}{d(x-ct)} = -cf'(x) + cg'(x) = 0$$

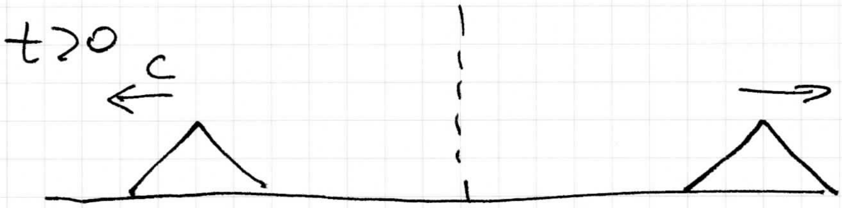
$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + \text{const.}$$

$$2g(x) + \text{const} = u_0(x)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{\text{const}}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{\text{const}}{2}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}u_0(x-ct) + \frac{1}{2}u_0(x+ct)$$



W chwilach późniejszych zaburzenie ma postać dwóch impulsów trójkątnych, których amplituda jest o połowę mniejsza od amplitudy impulsu początkowego: jeden impuls przemieszcza się w prawo, a drugi w lewo.

WYKŁAD 12a (6.05.2010)

Jednowymiarowe równanie falowe

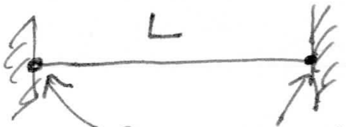
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad \psi(x,t)$$

wychylenie

$$\psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

f i g dowolne funkcje, można je wyznaczyć z warunków początkowych $\psi(x,0)$ & $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)$

Fale w strunie o skończonej długości



$0 < x < L$

zamocowane końce

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\forall_t \quad \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$$

Warunki brzegowe

Warunki początkowe $\psi(x,0)$ i $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0)$

Szukamy rozwiązania r. falowego w postaci Bernoulliego

TYLKO DLA FAL STOJĄCYCH

$$\psi(x,t) = g(x)h(t)$$

$$\frac{1}{c^2}g\ddot{h} = g''h \rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{h}}{h} = \frac{g''}{g}$$

Lewa strona zależy tylko od x

prawa " — " — " — " t

Obie strony muszą być równe stałej. Oznaczymy ją przez $-k^2$

$$\ddot{h} = -k^2c^2h \quad \& \quad g'' = -k^2g$$

oba równania mają periodyczne rozwiązania

① $h(t) = h_1\cos(kct) + h_2\sin(kct)$

② $g(x) = g_1\cos(kx) + g_2\sin(kx)$

zajmijmy się najpierw równaniem ②

$g(x)$ musi spełniać warunki brzegowe

$$g(0) = g(L) = 0$$

wyznaczają one wartości stałych g_1, i k

$$g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 \equiv 0$$

$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = \pi n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$k = \boxed{k_n = \frac{\pi}{L} n}$$

$$k_n c t = \omega_n t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_n = \frac{\pi}{L} c n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

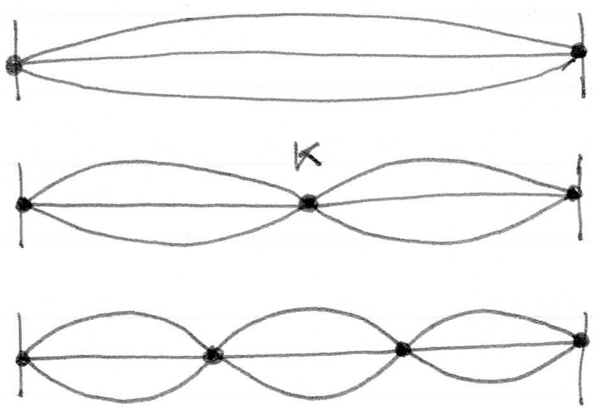
ω_n - częstości drgań własnych

k_n - wektory falowe $\qquad \boxed{\omega_n = k_n c}$ relacja dyspersyjna

Kontinuum → istnieją nieskończenie wiele częstości

Rozwiązania cząstkowe $\psi_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{L}x\,[d_n \cos\omega_n t + e_n \sin\omega_n t]$

Drgania własne



$n = 1$ Drganie podstawowe

$n = 2$ DRUGA HARMONICZNA

$n = 3$ TRZECIA HARMONICZNA

Ogólne rozwiązanie równania falowego (dla skończonej struny)

$$\boxed{\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{L}nx\,[d_n \cos\omega_n t + e_n \sin\omega_n t]}$$

To rozwiązanie jest periodyczne w czasie

$$\omega_n = n\omega_1$$

Współczynniki d_n i e_n są określone przez warunki początkowe

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{L}nx\right) d_n \qquad \dot{\psi}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n e_n \sin\frac{\pi}{L}nx$$

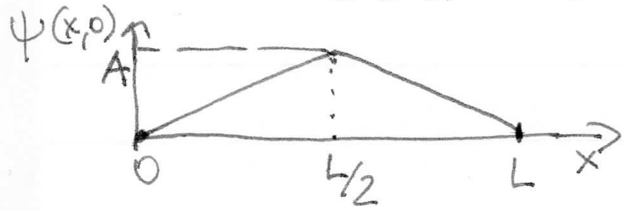
$$\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x \,\sin\frac{n'\pi}{L}x \, dx = \frac{L}{2}\delta_{nn'}$$

Współczynniki Fouriera

$$d_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x,0)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad n=1,2$$

$$e_n = \frac{2}{L}\int_0^L \dot{\psi}(x,0)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

Przykład: Widmo struny gitarowej o dł. L zamocowanej w p-kcie $x=0$ i $x=L$



$$\psi(x,0) = \frac{2A}{L}\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{L}{2} \\ L-x & \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$$

$$\dot{\psi}(x,0) = 0 \qquad 0\le x\le L$$

$$\forall_n \quad e_n = 0$$

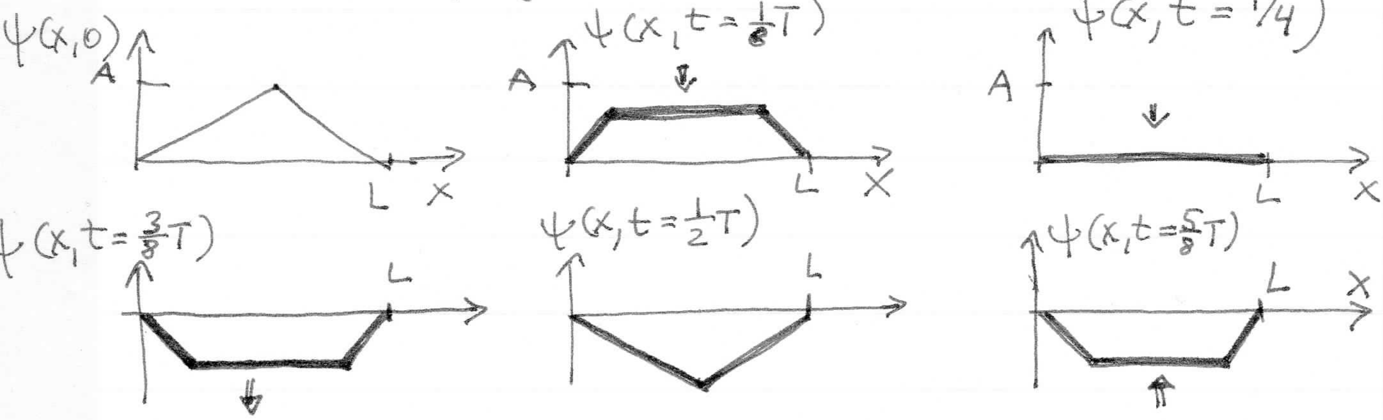
$$d_n = \frac{2\cdot 2A}{L\;L}\left\{\int_0^{\frac{L}{2}} x\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx\right.$$

$$d_n = \frac{8A}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{2}n$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n^2}\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}nct\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{2}n = 0 \quad \text{dla parzystych } n$$

Widmo w środku naprężonej struny zawiera drganie podstawowe i nieparzyste harmoniczne, które zanikają jak $1/n^2$



(Dla parametrów $A=0.1$; $L=1$; $c=1$)

Trójwymiarowe równanie falowe

$\psi(x,y,z,t)$ $$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi$$

zaburzenie w trójwymiarowym układzie fizycznym

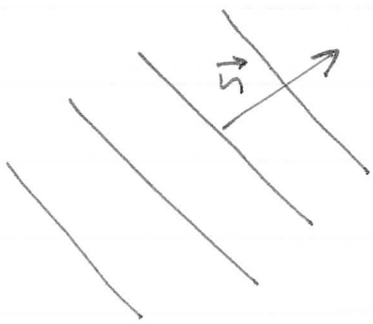
$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 \rightarrow \boxed{\Box\psi = 0}$$

Fale płaskie

$$\psi(\vec{r},t) = f(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)$$



ψ jest stałe na dowolnej płaszczyźnie $\perp \vec{n}$

ψ - zaburzenie przemieszcza się w kierunku $\vec{n}$ z prędkością c

Jeżeli f jest funkcją sinusoidalną, tzn $f(\xi) = \cos(k\xi)$

to $\psi(\vec{r},t) = \cos[k(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)]$ jest sinusoidalną falą płaską

Fale kuliste

fale o symetrii sferycznej

$$\psi = \psi(r,t)$$

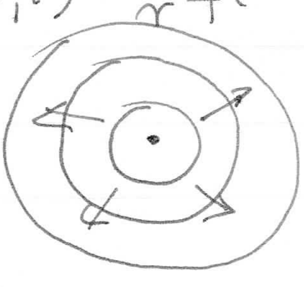
$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

$r\psi(r,t)$ - spełnia jednowymiarowe równanie falowe

$$r\psi(r,t) = f(r-ct) + g(r+ct)$$

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}f(r-ct) + \frac{1}{r}g(r+ct)$$



$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}f(r-ct)$$